Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 12 del 19/12/19

0. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si determini il comportamento della funzione $f(x) = \frac{\log(1+x^n)}{\log(x^n)}$ per x che tende a 0 e per x che tende a $+\infty$.

1. Al variare di n e m in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, determinare il comportamento della funzione $f(x) = \frac{\log(1+x^n)}{\log(1+x^m)}$ per x che tende a 0 e per x che tende a $+\infty$.

2. Si determini il comportamento della funzione $f(x) = \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$ per x che tende a 1.

3. Si determini il comportamento della funzione $f(x) = \frac{(1+x)^{1/2}-1}{(1+x)^{1/6}-1}$ per x che tende a 0.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica. Dimostrare che esistono in $\mathbb{R}$ un punto di massimo e un punto di minimo di f. La conclusione resta vera se eliminiamo l'ipotesi che f sia continua (restando periodica)?

5. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Supponiamo che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \mp\infty$. Dimostrare che esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) = g(a)$. Costruire un esempio esplicito di funzioni f, g che verifichino le proprietà dette sopra.

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Dimostrare che esiste in $\mathbb{R}$ un punto di minimo di f.

7. Sia $p(x) = a_0 + \cdots + a_d x^d$ una funzione polinomiale di grado pari d e tale che $a_d > 0$. Dimostrare che condizione sufficiente affinchè $p(x)$ ammetta una radice è che esista $a \in \mathbb{R}$ tale che $p(a) < 0$. Tale condizione è anche necessaria?

8. Dimostrare che se un intervallo I di $\mathbb{R}$ è compatto per successioni, allora I è chiuso e limitato.

9. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione bigettiva. Si mostri che f è strettamente decrescente se e solo se la funzione inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente decrescente.

10. Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente crescente, e sia $x_0 \in (a,b)$. Si mostri che esistono i limiti

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_1\,, \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_2\,,$$

e si mostri che $l_1 \leq f(x_0) \leq l_2$.

11. Si calcoli
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} \ .$$
(Suggerimento: si scriva $\cos x = 1+(\cos x - 1)$, e si moltiplichi e divida l'intera espressione per $\cos x - 1$).

12. Eventualmente riconducendosi all'esercizio precedente, si calcoli
$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} \ .$$

13. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
$$f(x) = \frac{\cos x}{x - \pi/2}$$
per ogni $x \neq \pi/2$. Si calcoli $f(\pi/2)$.

14. Si dica se esiste una funzione continua $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x \log |x|$ per ogni $x \neq 0$.

15. Facendo uso di opportuni cambi di variabile, si calcoli il seguente limite:
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (x - \pi/2) \tan x \ .$$

16. Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x) = 1/x$ per ogni $x \neq 0$.
(1) Può f essere continua?
(2) Può f essere bigettiva?

17. Calcolare i seguenti limiti
$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} , \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x , \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x + 3^{x^2}}{x^3}$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x + 3^{x^2}}{x^3} , \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{2^x + 3^{x^2}}{x^3} , \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{2^x + 3^{x^2}}{x^3}$$

18. Si calcolino
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} , \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} - x}{\sqrt{x^2+1} - x} \ .$$
(per il primo limite, si moltiplichino numeratore e denominatore per $(\sqrt{x+4} + \sqrt{x})$; per il secondo si proceda analogamente).

19. Al variare di $a > 0$, si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x^a} - x \ .$$

20. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - \arctan(7x)}{\arcsin(x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^4)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^4)}{\sin x^4},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\cdot \arctan x}{e^{x^2}-1}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(3x)\cdot \arctan x}{e^{x^2}-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x} \ .$$

21. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un qualsiasi numero reale. Usando il Teorema del valore intermedio, si mostri che l'equazione

$$x \sin x = \lambda$$

ha infinite soluzioni.

22. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un qualsiasi numero reale. È vero che l'equazione

$$x \sin \frac{1}{x} = \lambda$$

ha infinite soluzioni?

23. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, si determini il numero delle soluzioni dell'equazione

$$e^{-x^2} = \lambda \ .$$

(Attenzione: per studiare la monotonia di e^{-x^2} è sufficiente decomporla come composizione di funzioni).