Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 11 del 11/12/19

0. È inteso che tutte le funzioni considerate in questo esercizio sono definite su un insieme della forma $D := I(0,\varepsilon)\setminus\{0\}$, $\varepsilon > 0$ opportuno. Si chiede di determinare il comportamento di ognuna di queste funzioni per x che tende a 0.

$$\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x^3\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad e^{1/x}\sin(x), \quad \left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)^{1+x}, \quad \left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x}, \quad \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}\ .$$

1. (a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica non costante. Dimostrare che non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
(b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dispari. Dimostrare che se $\lim_{x\to 0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, allora $L = 0$.

Nel seguito, per ogni funzione $f : D \to \mathbb{R}$, indicheremo con $C(f)$ l'insieme dei punti $x \in D$ tali che f è continua in x.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet definita da $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Determinare $C(f)$.

3. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le due funzioni definite come segue:
$f(x) = x\sin(1/x)$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$; $g(x) = 1$ se $x \neq 0$, $g(0) = 0$.
Determinare gli insiemi $C(f)$, $C(g)$ e $C(g \circ f)$.

4. Siano $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(D_1) \subset D_2$, così che è definita la funzione composta $g\circ f : D_1 \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione per D_1. Supponiamo che:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$;
- $+\infty$ è di accumulazione per D_2 e $\lim_{y\to+\infty} g(y) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dimostrare che $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L$.

5. Siano $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(D_1) \subset D_2$, così che è definita la funzione composta $g\circ f : D_1 \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione per D_1. Supponiamo che:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$;
- $y_0 \in D_2$ ed è di accumulazione per D_2, $\lim_{y\to y_0} g(y) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;
- La funzione g è continua in y_0.

Dimostrare che $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L$.

6. Al variare di $a \in R$, $a > 0$, si studi il comportamento della funzione

$$\frac{x^5 + \sqrt{x}\sin^3(x)}{(\sqrt{x})^a}$$

per $x \to 0^+$.