Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Chimica
Analisi Matematica 1 - Foglio di esericizi n.ro 10 del 02/12/19

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$. Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, la funzione f è periodica di periodo nT.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e si supponga che f sia 7-periodica e anche 3-periodica. Si dimostri che f è 1-periodica (suggerimento: si cerchi di scrivere innanzi tutto $1 = 7a + 3b$ per opportuni $a, b \in \mathbb{Z}$).

3. Si determini, se esiste, il periodo minimo della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(4x)$.

4. Si determini, se esiste, il periodo minimo della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(3x) + \cos(5x)$.

5. Si dica se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$ sia periodica (suggerimento: si determinino le soluzioni dell'equazione $f(x) = 2$).

6. Si dimostri che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari non può essere iniettiva. Si costruisca una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari surgettiva.

7. Si determinino tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari e debolmente monotone.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x^3)$. È vero che, se g è dispari, allora f è dispari?

9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e siano $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $g(x) = f(x^2)$, $h(x) = f(x)^2$. Sotto quali condizioni g è pari? È vero che, se f è dispari, allora h è pari? È vero che, se f è pari, allora h è pari? Si esibisca una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per cui h non sia pari.

10. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, si determini il numero di soluzioni dell'equazione $|x^2 - 3| = \lambda$.

11. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, si determini il numero di soluzioni dell'equazione $5 - |x - 3| = \lambda$.

12. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n+4^n}{5^n}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)^n+n^5}{n!+2^n}}\ .$$

13.

(1) È vero che, se a_n, b_n sono successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ e b_n non ammette limite, allora la successione prodotto $a_n b_n$ non ammette limite?

(2) È vero che, se a_n, b_n sono successioni che non ammettono limite, allora la successione $a_n + b_n$ e la successione $a_n b_n$ non ammettono limite?

14. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}\ .$$

15. Mostrare che la successione $a_n = \dfrac{n}{2n+1}\sin\left(\dfrac{n\pi}{10}\right)$ è limitata ma non ammette limite.

16. Si consideri la funzione $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = (\log(x))^2$.

i. Si dica se f sia crescente, decrescente o né crescente né decrescente.
ii. Si calcoli $f^{-1}(\{1\})$. Quanti elementi contiene?
iii. Si determini il sottoinsieme $J \subseteq \mathbb{R}$ dato dall'immagine di f.
iv. Si determini un intervallo $I \subseteq (0,+\infty)$ tale che la restrizione $f|_I : I \longrightarrow J$ di f a I sia bigettiva.