Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 9 del 26/11/19

1. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, esiste una successione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che $a_n \in \mathbb{Q}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$.

2. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, se è vera dimostrarlo, se è falsa esibire un controesempio.

(i) Se una successione a_n è diverge a $+\infty$ (cioè $a_n \to +\infty$), allora la successione è definitivamente crescente.

(ii) Se una successione a_n non è superiormente limitata, allora esiste una successione estratta a_{n_m} tale che $\lim_{m\to+\infty} a_{n_m} = +\infty$.

(iii) Se una successione a_n è superiormente limitata, allora esiste una successione estratta a_{n_m} tale che $\lim_{m\to+\infty} a_{n_m} = \sup\{a_n\}$. Stessa affermazione, supponendo in più che $\sup\{a_n\}$ non è il massimo di $\{a_n\}$.

3. Le seguenti affermazioni sono state enunciate a lezione e in parte dimostrate. Dettagliare e completare. Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$:

(i) Sia x_n una succesione convergente a 0. Dimostrare che $a^{x_n} \to 1$.

(ii) Sia x_n una succesione convergente a L. Dimostrare che $a^{x_n} \to a^L$.

(iii) Sia y_n a termini positivi e tale che $y_n \to 1$, dimostrare che $\log_a(y_n) \to 0$.

(iv) Sia y_n a termini positivi e tale che $y_n \to L > 0$, dimostrare che $\log_a(y_n) \to \log_a(L)$.

(v) Sia y_n a termini positivi e tale che $y_n \to L > 0$, dimostrare che per ogni $b \in \mathbb{R}$, $y_n^b \to L^b$.

4. Si studi il comportamento per n che tende a $+\infty$ della successione

$$a_n = \frac{n^2 \sin(n\pi/2) + \sin(n^2)}{n^2 + 1}, \ n \geq 0 \ .$$

5. Per ogni $b > 0$, si studi il comportamento per n che tende a $+\infty$ della successione

$$a_n = (1 + b/n)^n, \ n \geq 1 \ .$$

6. Si studi il comportamento per n che tende a $+\infty$ della successione

$$a_n = (1 + e^n/n!)^n, \ n \geq 1 \ .$$

7. Sia a_n una successione a termini positivi, limitata e tale che $L := \inf\{a_n\} > 0$. Dimostrare che $a_n^{1/n} \to 1$. Cosa possiamo dire se $L = 0$?

8. A lezione abbiamo enunciato: "Se la successione a_n è regolare, allora anche la successione delle *medie aritmetiche* dei termini di a_n è regolare e le due successioni hanno lo stesso limite". Lo abbiamo dimostrato nel caso in cui a_n è convergente. Dimostrarlo quando a_n è divergente.

9. A lezione abbiamo enunciato: "Se la successione a_n è a termini positivi e regolare, allora anche la successione delle *medie geometriche* dei termini di a_n è regolare e le due successioni hanno lo stesso limite". Lo abbiamo dimostrato nel caso in cui $a_n \to 1$. Giustificare che per mostrarlo in generale (cioè $a_n \to L \in \{x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$) basta farlo per $L = +\infty$.

10. Per ogni successione a_n, $n \geq 1$, si consideri la successione delle differenze $b_n = a_n - a_{n-1}$. Supponendo b_n regolare, dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n/n = \lim_{n\to+\infty} b_n \ .$$

11. Si considerino le due successioni

$$a_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}, \qquad b_n = a_n + \frac{1}{n!},\ n \geq 0 \ .$$

(i) Verificare che a_n è strettamente crescente e che b_n è definitivamente strettamente decrescente.

(ii) Dimostrare che entrambe le successioni a_n e b_n sono convergenti e che hanno lo stesso limite $L \in \mathbb{R}$.

(iii) Dimostrare che L non è un numero razionale.

(iv) Dimostrare che $L = e$, il numero di Nepero (suggerimento: ripercorrere la costruzione che ha portato a definire e come $e = \lim_{n\to+\infty}(1 + 1/n)^n$).

12. Sia $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Sia a_n la successione definita per induzione come segue, per ogni $n \geq 0$:

$a_0 = a$; per ogni $n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2)$.

(i) Verificare che a_n è a valori positivi, strettamente decrescente.

(ii) Verificare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-a}$.

13. Sia a_n la successione definita per induzione come segue:

$a_0 = \sqrt{2}$; per ogni $n \geq 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$.

(i) Dimostrare che se a_n è convergente, allora $a_n \to 2$.

(ii) Dimostrare che $a_n \to 2$.

14. Si studi il comportamento per n che tende a $+\infty$ della successione

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ n \geq 1 \ .$$