Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 8 del 19/11/19

1. Siano a_n, b_n successioni tali che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1\,, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = l_2\,,$$

dove l_1, l_2 sono numeri reali.

(1) Si mostri che esiste $B \in \mathbb{R}$ tale che $|b_n| \le B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. (Suggerimento: si mostri innanzi tutto che $|b_n| \le |l_2| + 1$ definitivamente).
(2) Si mostri che $|a_n b_n - l_1 l_2| \le |b_n| \cdot |a_n - l_1| + |l_1| \cdot |b_n - l_2|$ (Suggerimento: si sommi e si sottragga $l_1 b_n$).
(3) Si mostri che, se $|a_n - l_1| < \delta_1$ e $|b_n - l_2| < \delta_2$, allora $|a_n b_n - l_1 l_2| \le B\delta_1 + |l_1|\delta_2$, dove B è la costante trovata al punto (1).
(4) Si concluda che $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = l_1 l_2$.

2. Sia a_n una successione. Si mostri che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0\,.$$

3. Sia a_n una successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, dove l è un numero reale diverso da 0.

(1) Si mostri che, definitivamente,

$$\Big|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\Big| \le 2\frac{|l - a_n|}{l^2}\,.$$

(2) Si mostri che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{l}\,.$$

3. Siano a_n, b_n successioni tali che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l\,, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty\,,$$

dove l è un numero reale strettamente negativo. Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = -\infty\,.$$

4. È vero che, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0^+$, allora a_n è definitivamente strettamente decrescente? È vero che, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e a_n è definitivamente strettamente decrescente, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0^+$?

5. Al variare di $d \in \mathbb{N}$, si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 - n^4 + \sin n}{n^d + n + 1} \, .$$

6. Si dica se le seguenti successioni sono monotone, e se sono definitvamente monotone.

$$a_n = \frac{3n}{n^2+1} \, , \qquad b_n = \frac{n!}{n^n} \, , \qquad c_n = \frac{n!}{2^n} \, .$$

7. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n + n^3 + 5} \, , \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + \sin n} \, , \, , \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + \sin n} \, , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3+5}}{n} \, .$$