Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 5 del 29/10/19

1. Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $a < b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, si dica se sia vera o falsa, dimostrandola nel primo caso e fornendo un controesempio nel secondo.

(1) $\sup A < \inf B$.
(2) $\sup A \leq \inf B$.
(3) $\sup A = \inf B$.

2. Sia $A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^3 < 2\}$. Si calcoli $\sup A$, giustificando adeguatamente la risposta.

3. Ragionando come si è fatto in aula per l'irrazionalità di $\sqrt{2}$, si mostri che l'equazione $x^3 = 3$ non ammette soluzioni razionali.

4. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$. Si determini l'insieme dei maggioranti di A.

5. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2^x \leq 2\}$. Si dica se A ammetta maggioranti, e se A ammetta minoranti.

6. Siano A, B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$. Si mostri che

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}\,, \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}\ .$$

(Qui e nell'esercizio successivo, si intende che $\max\{+\infty, +\infty\} = \max\{+\infty, a\} = +\infty$, e $\min\{-\infty, -\infty\} = \min\{-\infty, a\} = +\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$).

7. Siano A, B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $A \subseteq B$. Si dimostri che

$$\sup A \leq \sup B\,, \qquad \inf A \geq \inf B\ .$$

8. Siano A, B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $\sup A = 1$, $\sup B = 2$, e sia

$$C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \text{esistono } a \in A, b \in B \text{ con } x = a + b\}\ .$$

È possibile calcolare $\sup C$ a partire dai soli dati in nostro possesso? In caso affermativo, quanto vale?

In quanto segue, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ poniamo $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$.

9. Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si determinino $c, d \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = cx + d$ verifichi le condizioni $f(0) = a$, $f(1) = b$. Si dimostri che f si restringe a una bigezione tra $[0,1]$ e $[a,b]$, e se ne deduca che, dati comunque a,b,c,d con $a<b$ e $c<d$, gli insiemi $[a,b]$ e $[c,d]$ hanno la stessa cardinalità.

10. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=1/(1+x^2)$.

(1) La funzione f è iniettiva?
(2) La funzione f è surgettiva?
(3) Si mostri che la restrizione di f a $(0,+\infty)$ stabilisce una bigezione tra $(0,+\infty)$ e $(0,1)$.

11. Nel prosieguo del corso, definiremo la nozione di *funzione continua*, e saremo in grado di dimostrare che non esistono funzioni *continue* e bigettive (in realtà, nemmeno continue e surgettive) da $[0,1]$ a $(0,1)$. Questo esercizio mostra che è però possibile costruire una bigezione esplicita tra $[0,1]$ e $(0,1)$.

Si consideri la funzione $f\colon [0,1]\to(0,1)$ così definita:

- $f(0)=1/2$;
- $f(1)=1/3$;
- se esiste $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, tale che $x=1/n$, allora $f(x)=1/(n+2)$;
- in tutti gli altri casi (cioè se $x\neq 0$ and $x\neq 1/n$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$), allora $f(x)=x$.

Si dimostri che f è ben definita e bigettiva.