Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 5 del 29/10/19

1. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, se è vera dimostrarlo, se è falsa esibire un controesempio. Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e superiormente limitato.
(a) Se $L = \sup(A)$ e A ammette massimo M, allora $M = L$.
(b) Se $L = \sup(A)$, allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $a \in A$ tale che $L - \varepsilon < a < L$.
(c) Se $L = \sup(A)$, allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $a \in A$ tale che $L - \varepsilon < a \leq L$.
(d) Se A non ammette massimo allora A è infinito.

2. Per ogni $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, si consideri l'insieme $X = \{\frac{m}{b^n};\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$.
(a) Mostrare che $X \neq \mathbb{Q}$.
(b) Dimostrare che X è denso in $\mathbb{R}$.

3. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ non vuoti, e tali che per ogni $a \in A$, esiste $b \in B$ tali che $a \leq b$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, se è vera dimostrarlo, se è falsa esibire un controesempio.
(a) Per ogni $a \in A$ per ogni $b \in B$, $a \leq b$.
(b) Se A e B sono superiormente limitati, allora $\sup(A) \leq \sup(B)$.
(c) Se A e B sono superiormente limitati, esiste $b \in B$ tale che per ogni $a \in A$, $a \leq b$.

4. Determinare, se esistono, il massimo o l'estremo superiore (risp. il minimo o l'estremo inferiore) dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

$$\{x = (n+1)/(n+2);\ n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{x = 2^n - 2^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$$
$$\{x = 1/n^2 - 1/n;\ n \in \mathbb{N},\ n > 0\}\ .$$

In seguito, se $d(a) = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ è l'allineamento decimale proprio di $a \in \mathbb{R}$, per ogni $p \in \mathbb{N}$, indicheremo con $d(a)_p$ la troncatura fino alla p-esima cifra decimale di $d(a)$, $d(a)_p = a_0, a_1 \ldots a_p$, così che $0 \leq a - d(a)_p < \frac{1}{10^p}$. A volte scriveremo "$a = d(a)$", intendendo che a è determinato per mezzo di $d(a)$, infatti abbiamo visto a lezione che $a = \sup\{d(a)_p; p \in \mathbb{N}\}$.

5. Determinare "a mano" $d(\sqrt{3})_4$.

6. Se $d(a)_4 = 1,2468$, $d(b)_4 = 0,5631$ (e non conosciamo nient'altro di $d(a)$ e $d(b)$), determinare il più grande p per cui conosciamo $d(a+b)_p$. Stessa domanda per

$$d(a)_4 = 0,1357,\ d(b)_4 = 0,8642$$

$$d(a)_4 = 0,1357,\ d(b)_4 = 0,8643\ .$$

7. Dimostrare che $a = 0,1234567891011121314151617181920 21\dots$ non è un numero razionale.

8. Indicato con D l'insieme degli allineamenti decimali propri, a lezione abbiamo definito la funzione $d : \mathbb{R} \to D$ e la funzione $s : D \to \mathbb{R}$, $s(d) = \sup\{d_p;\ p \in \mathbb{N}\}$. Abbiamo anche dimostrato che $s \circ d = 1_{\mathbb{R}}$, da cui deduciamo che d è iniettiva e s è surgettiva. Dimostrare che vale anche $d \circ s = 1_D$ (da cui deduciamo infine che d è bigettiva).

Negli esercizi che seguono, $|A|$ indica la cardinalità dell'insieme A (finito o infinito che sia).

9. Poiché $d : \mathbb{R} \to D$ è bigettiva, allora $d|\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \to d(\mathbb{Q})$ è bigettiva; quindi $|\mathbb{Q}| = |d(\mathbb{Q})|$. Abbiamo già visto a lezione che $\mathbb{Q}$ è numerabile. Usando le proprietà di $d(\mathbb{Q})$, dare un'altra dimostrazione che $\mathbb{Q}$ è numerabile.

10. Dimostrare che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri *irrazionali*, non è numerabile.

11. Se A è infinito e numerabile, dimostrare che $A \times A$ è numerabile.