Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 3 del 15/10/19

Negli esercizi seguenti, X denoterà sempre un campo, il cui elemento neutro rispetto alla somma sarà indicato con 0, ed il cui elemento neutro rispetto al prodotto sarà denotato con 1. Ricordiamo anche che, per ogni $x \in X$, il simbolo $-x$ denota l'opposto di x (rispetto all'operazione $+$), e $x - y$ significa per definizione $x + (-y)$.

1. Facendo uso dei soli assiomi, dimostrare che:

(1) $-(-x) = x$ per ogni $x \in X$.
(2) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ per ogni $x, y \in X$.
(3) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ per ogni $x, y \in X$.
(4) Se $x \cdot y = 0$, allora $x = 0$ o $y = 0$ (o entrambi).

Si supponga ora che X sia anche ordinato.

2. Facendo uso dei soli assiomi, dimostrare che:

(1) Dati $x, y \in X$, si ha $x \leq y$ se e solo $-y \leq -x$.
(2) Per ogni $x \in X$, si ha $x \cdot x \geq 0$ (Suggerimento: se $x \geq 0$, si usi direttamente uno dei due assiomi di campo ordinato; se $x \leq 0$, si usino il punto (1) di questo esercizio ed il punto (3) dell'esercizio precedente per ricondursi al primo caso).
(3) Si mostri che $1 > 0$ (Suggerimento: si osservi che $1 = 1 \cdot 1$).

3. Abbiamo dimostrato in classe che, se $x \geq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z$. Facendo uso degli assiomi e degli esercizi precedenti, si dimostri che, se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

4. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, denotiamo con x_n l'elemento di X ottenuto sommando n volte 1: ad esempio, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + 1$, $x_3 = 1 + 1 + 1$, $x_4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

- Si dimostri per induzione che $x_n \geq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- Supponendo che $x_n = x_0$, si mostri che $x_0 = x_1 = \ldots = x_n$;
- Ricordando che $0 \neq 1$, si concluda che $x_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

5. Si dica quali delle seguenti coppie di sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ definiscono delle sezioni di Dedekind. Per quelle che lo sono, si dica quali di esse ammettono infiniti elementi separatori, quali ammettono esattamente un elemento separatore, quali non ammettono alcun elemento separatore.

(1) $A = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^2 \leq 4\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^2 \geq 9\}$.
(2) $A = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^2 \leq 4\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \geq 0 \text{ e } q^2 \geq 9\}$.
(3) $A = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^2 \leq 4\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \geq 0 \text{ e } q^2 > 5\}$.
(4) $A = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^2 \leq 4\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \geq 0 \text{ e } q^2 > 4\}$.

(5) $A = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q^2 \leq 5\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \geq 0 \text{ e } q^2 > 5\}$.

6. Sia $\diamond$ l'operazione binaria su $\mathbb{Q}$ così definita:

$$x \diamond y = x + y + xy \ ,$$

dove stiamo considerando su $\mathbb{Q}$ le usuali operazioni di somma e prodotto.

(1) È vero che $x \diamond y = y \diamond x$ per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$?
(2) È vero che $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{Q}$?
(3) È vero che esiste un elemento $e \in \mathbb{Q}$ tale che $x \diamond e = x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$? Tale e è unico?
(4) È vero che, dato $x \in \mathbb{Q}$, esiste sempre $y \in \mathbb{Q}$ tale che $x \diamond y = e$?

7. Sia $\diamond$ l'operazione binaria su $\mathbb{Q}$ così definita:

$$x \diamond y = x + y - 5 \ ,$$

dove stiamo considerando su $\mathbb{Q}$ le usuali operazioni di somma e prodotto.

(1) È vero che $x \diamond y = y \diamond x$ per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$?
(2) È vero che $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{Q}$?
(3) È vero che esiste un elemento $e \in \mathbb{Q}$ tale che $x \diamond e = x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$? Tale e è unico?
(4) È vero che, dato $x \in \mathbb{Q}$, esiste sempre $y \in \mathbb{Q}$ tale che $x \diamond y = e$?
(5) È vero che $(x \diamond y) \cdot z = (x \cdot z) \diamond (y \cdot z)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{Q}$?