Teoria dei nodi. Quarto foglio di esercizi.

Roberto Frigerio

1 marzo 2012

1. Sia K_1 un satellite di K_2 con pattern K', e supponiamo che la classe di K_1 in $H_1(N(K_2))$ sia uguale a $n[K_2]$. Si mostri che

$$g(K_1) \geq ng(K_2) + g(K') \ .$$

   Si descriva un caso in cui l'uguaglianza non vale.

2. Si considerino i links L_1, L_2 e L_1', L_2' mostrati in Figura 1.

   - È vero che $E_i(L_1) = E_i(L_2)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$?
   - È vero che $E_i(L_1') = E_i(L_2')$ per ogni $i \in \mathbb{N}$?

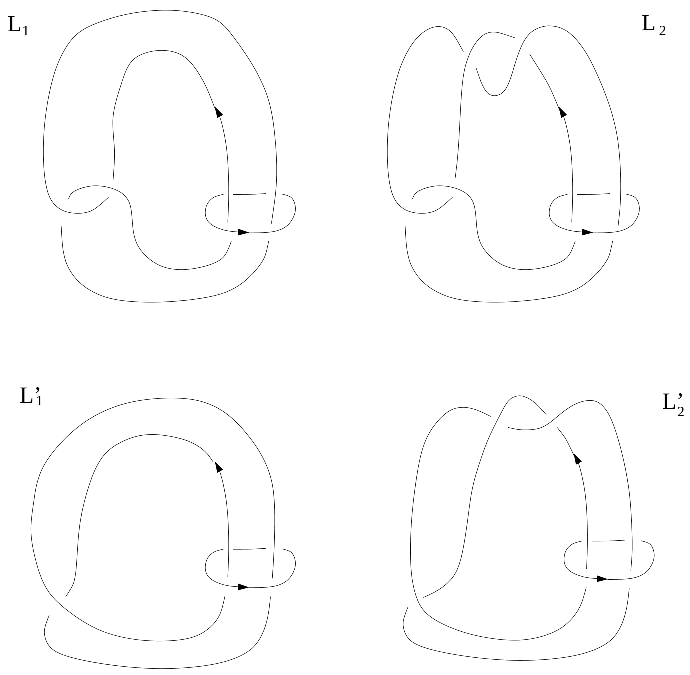

Figura 1: Figura per l'Esercizio 2

3. Sia K un nodo, sia $K' \subseteq C(K)$ una longitudine di K e sia $L = K \cup K'$. Si mostri che $E_0(L) = E_1(L) = 0$, e che $E_2(L)$ è un ideale principale generato dal polinomio

$$p(t_1, t_2) = \Delta(K)(t_1 t_2) \ ,$$

dove $\Delta(K)(t)$ è il polinomio di Alexander di K.

4. Siano K_1, K_2 due nodi orientati, sia $L = K_1 \cup K_2$, e sia S una superficie di Seifert connessa per L. Sia inoltre J la matrice quadrata di ordine $2g+1$ tale che

$$J_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 2k-1, j = 2k, \quad k = 1, \dots, g \\ -1 & \text{se } i = 2k, j = 2k-1, \quad k = 1, \dots, g \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(in particolare, $J_{ij} = 0$ se $i = 2g+1$ o $j = 2g+1$).

- Si mostri che esiste una base $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g+1}$ di $H_1(S)$ tale che $i(\gamma_i, \gamma_j) = J_{ij}$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, 2g+1\}$, e $\mathrm{lk}(\gamma_{2g+1}, \gamma_{2g+1}^+) = \mathrm{lk}(K_1, K_2)$.
- Sia A la matrice di Seifert associata a S (ovvero, $A_{ij} = \mathrm{lk}(\gamma_i, \gamma_j^+)$ per ogni i, j). Si mostri che
$$tA - {}^tA = (t-1)A + J \ .$$
- Si mostri che
$$\Delta(L)(t) \doteq (t-1) \cdot p(t) \ ,$$
dove
$$|p(1)| = |\mathrm{lk}(K_1, K_2)| \ .$$