Teoria dei nodi. Terzo foglio di esercizi.

Roberto Frigerio

7 dicembre 2011

1. - Sia D_n il gruppo diedrale con $2n$ elementi. Si mostri che $D_n'' = \{1\}$ (si ricordi che $D_n' = [D_n, D_n]$, $D_n'' = [D_n', D_n']$.
   - Sia K_1 un nodo dotato di un diagramma come in Figura 1, parte sinistra, e si supponga che K_2 ammetta una n-colorazione tale che gli archi denotati con a e b abbiano colori diversi. Sia inoltre $L = K_1 \cup K_2$ il link raffigurato a destra. Si mostri che L non è un boundary link.

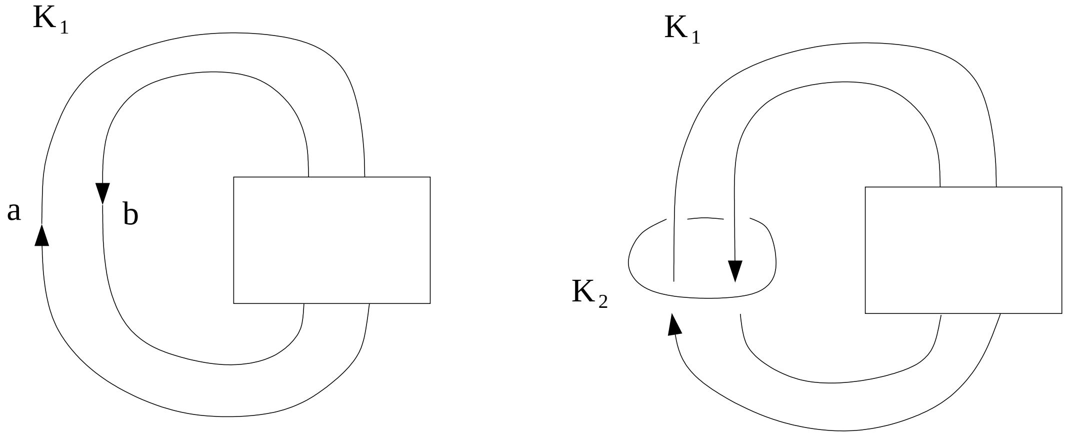

Figura 1: Figura per l'Esercizio 1. Nel box quadrangolare può esservi un qualsiasi diagramma orientato per cui K_1 risulti connesso e orientato come prescritto.

   - Si disegni un link $K_1 \cup K_2$ con le seguenti proprietà: K_1 è un nodo trifoglio e K_2 è un nodo banale, $lk(K_1, K_2) = 0$ e L *non* è un boundary link.

2. Sia $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Si determinino condizioni necessarie e sufficienti su a_0, a_1, a_2 in modo che $p(t)$ sia (a meno di invertibili in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$) il polinomio di Alexander di un nodo di genere 1. (Suggerimento: si considerino diagrammi che rappresentano il nodo come bordo di una superficie a bande, con bande eventualmente annodate e/o twistate).

3. Per lo svolgimento del seguente esercizio può essere utile ricordare che, se A è una

matrice quadrata a coefficienti in un anello commutativo, allora esiste una matrice A^* quadrata dello stesso ordine tale che $AA^* = A^*A = (\det A) \cdot \mathrm{Id}$. Sia K un nodo.

- Si mostri che $A_0(K)$ è uno $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-modulo di torsione, ovvero che per ogni $c \in A_0(K)$ esiste $p(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ tale che $p(t) \cdot c = 0$.
- Si mostri che $A_0(K)$ non ha elementi di torsione su $\mathbb{Z}$, ovvero che se $c \in A_0(K)$ è tale che $m \cdot c = 0$ per qualche $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, allora $c = 0$.
- Si mostri che $A_0(K) = 0$ se e solo se $\Delta(K) \doteq 1$.
- Sia $c \in A_0(K)$ un elemento tale che $t \cdot c = c$ (ovvero, la classe di omologia c è lasciata fissa dal generatore del gruppo degli automorfismi di rivestimento di $\widetilde{C(K)}_\infty$). Si mostri che $c = 0$.

4. Siano K_1, K_2 i nodi mostrati in Figura 2. Si mostri che $\pi_1(C(K_1)) = \pi_1(C(K_2))$. Si determini la decomposizione in primi di K_1 e di K_2.

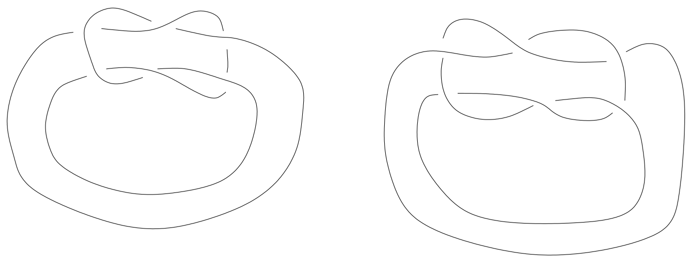

Figura 2: Figura per l'Esercizio 4