Confronto serie - integrali impropri

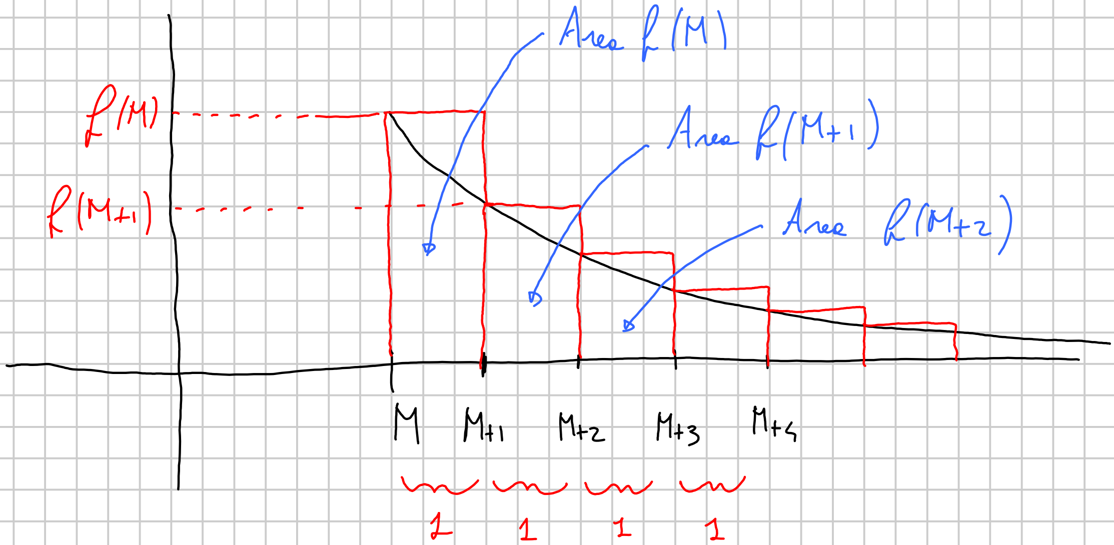
Teorema: Sia $f: [M, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione POSITIVA e DECRESCENTE, $M \in \mathbb{N}$.

Sia f integrabile secondo Riemann su $[M, x]$ $\forall x \geq M$ (per esempio, f continua). Allora:

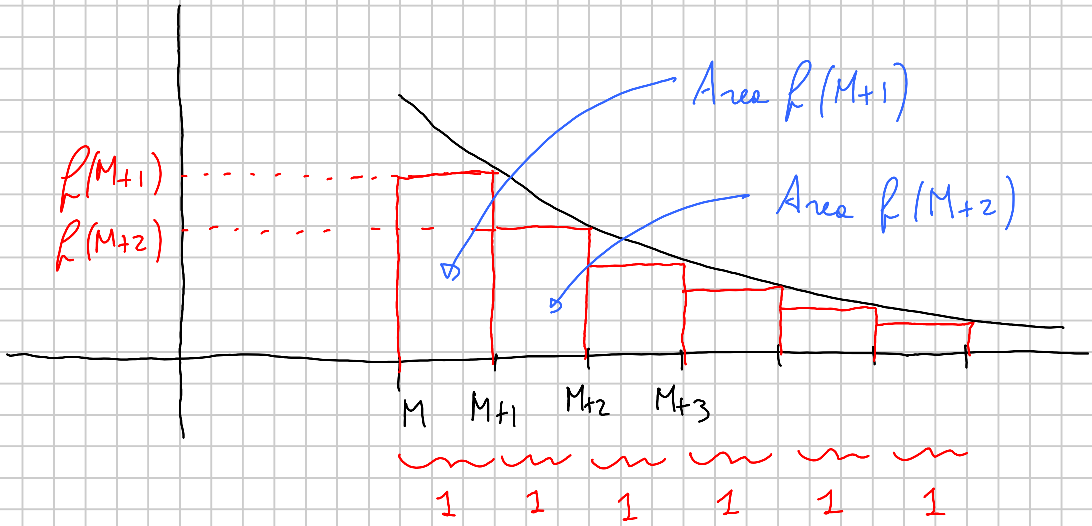
$$\boxed{\sum_{n=M+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_M^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)}$$

In particolare, l'integrale $\int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se e solo se la serie $\sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$ converge.

Dim.: Per prima cosa diamo un'interpretazione grafica.



"Dunque" (poi lo formalizziamo) poiché la somma delle aree dei rettangoli rossi è maggiore dell'Area del sottografico di f, allora $$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=M}^{+\infty} f(n).$$



"Dunque" $$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \ge \sum_{n=M+1}^{\infty} f(n).$$

Formalmente, osserviamo che, per un noto teorema di confronto funzioni-successioni,

$$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\text{definizione}}{=} \lim_{c\to+\infty} \int_M^{c} f(x)\,dx \underset{\text{confronto funzioni-successioni}}{=} \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \int_M^{n} f(x)\,dx$$

Ora $\forall k \ge M$, $k \in \mathbb{N}$, poiché f è decrescente,

$$f(k) \ge f(x) \ge f(k+1) \qquad \forall x \in [k, k+1].$$

Dunque $$f(k) \ge \int_k^{k+1} f(x)\,dx \ge f(k+1)$$ (l'intervallo di integrazione è ampio 1)

Dunque se $n \ge M$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_M^n f(x)\,dx = \int_M^{M+1} f(x)\,dx + \int_{M+1}^{M+2} f(x)\,dx + \dots + \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$

$$\geq f(M+1) + f(M+2) + \dots + f(n+1)$$

per cui passando al limite $\displaystyle\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{n=M+1}^{\infty} f(n)$

Analogamente, $\displaystyle\int_M^n f(x)\,dx = \int_M^{M+1} f(x)\,dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx \leq$

$$\leq f(M) + \dots + f(n)$$

da cui $\displaystyle\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=M}^{+\infty} f(n).$

$\square$

Di norma, questo criterio si usa per dimostrare la convergenza (o divergenza) di serie a partire da integrali impropri "noti".

Otteniamo ad esempio una dimostrazione nuova (e più semplice) del seguente

Teorema: Sia $a>0$. Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ converge se $a>1$ e diverge se $a \leq 1$.

Dim.: (Vi ricordo che il caso "difficile" era $1<a<2$, per il quale avevamo scomodato il lemma di condensazione).

Sia $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^a}$. Questa funzione è chiaramente positiva e decrescente, per cui posso applicare il Teorema precedente. Perciò

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \text{ converge.}$$

Ma sappiamo che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}$ converge $\iff a > 1$.

Inoltre $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, da cui la tesi.

$\square$

Teorema: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^a}$ converge $\iff a > 1$.

Dim.: Criterio di radice e rapporto non risolvono, né è facile trovare serie "note" con cui usare confronto o confronto asintotico.

la serie associata converge

la serie associata diverge

Se $a, b > 0$, definitivamente $\frac{1}{n^{1+b}} \leq \frac{1}{n(\log n)^a} \leq \frac{1}{n}$

Dunque ???

L'unico strumento che abbiamo sviluppato che può funzionare è il criterio serie-integrali.

Sia $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^a}$

Se $a \leq 0$, $\frac{1}{n(\log n)^a} = \frac{(\log n)^{-a}}{n} \geq \frac{1}{n}$ per $n \geq 3$, e la serie diverge.

Sia $a > 0$ (il caso interessante).

Ora $\log x$ è crescente, perciò lo è anche $(\log x)^a$, e lo è il denominatore di $f(x)$ (stiamo lavorando con $x \geq 2$).

Dunque f è decrescente. È inoltre ovviamente positiva.

Dunque posso applicare il teorema, che mi dice che

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} = \sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_2^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

Studiamo $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx$.

Posto $y = \log x$, abbiamo $dy = \frac{1}{x}\,dx$, e

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_2^{c} \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log c} \frac{1}{y^a}\,dy =$$

$\to +\infty$ per $c \to +\infty$

$$= \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^a}\,dy \text{ che converge} \iff a > 1.$$

$\square$

UN'ALTRA APPLICAZIONE

Consideriamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$. Converge in quanto è a termini positivi e il criterio della radice dà

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1.$$

Domanda: Che errore si commette (al massimo) stimando la somma della serie $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ con la somma parziale $S_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} \frac{n}{e^n}$? Per esempio, quanti termini devo sommare per avere un errore minore di 10^{-6}?

L'errore che commetto è $S - S_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n} - \sum_{n=0}^{k} \frac{n}{e^n} =$

$$= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n}{e^n}.$$ Per il Teorema visto oggi,

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n}{e^n} \leq \int_k^{+\infty} \frac{x}{e^x}\,dx = \int_k^{+\infty} x e^{-x}\,dx$$

Ora $$\int \underbrace{x}_{F}\underbrace{e^{-x}}_{g}\,dx = -e^{-x}\cdot x - \int (-e^{-x})\cdot 1\,dx =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

Dunque $$\int_k^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_k^c xe^{-x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_k^c =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} -\underbrace{ce^{-c}}_{\to 0} - \underbrace{e^{-c}}_{\to 0} + ke^{-k} + e^{-k} = (k+1)e^{-k}$$

Perciò $S - S_k = |S - S_k| \leq (k+1)e^{-k}$, ad esempio sommando i primi 10 termini ho un errore $\leq 11\, e^{-10}$.

Per avere un errore $\leq 10^{-6}$ cerco k tale che $(k+1)e^{-k} \leq 10^{-6}$, cioè $\frac{e^k}{k+1} \geq 10^6$.

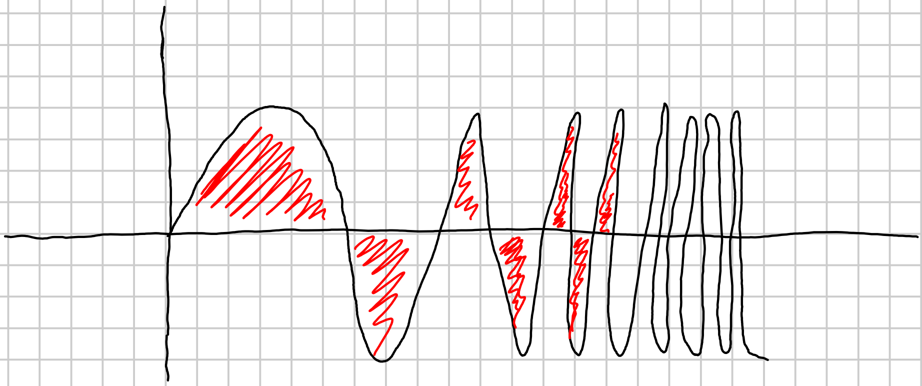
Basta ad esempio $k \geq 20$ (controllate!).

ANCORA INTEGRALI OSCILLANTI

Abbiamo visto che $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge, ma non assolutamente.

Analogo fenomeno si ha per $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$

Proposizione: $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ converge, ma non assolutamente.



oscillazioni sempre più strette

Ad esempio, $\sin(x^2)=0 \iff x^2=k\pi,\ k\in\mathbb{N} \iff x=\sqrt{k}\cdot\sqrt{\pi},\ k\in\mathbb{N}$

Gli zeri di $\sin(x^2)$ sono sempre più vicini al crescere di x.

Come per $\frac{\sin x}{x}$, per mostrare la convergenza si integra per parti, dopo avere moltiplicato e diviso per x. Sia $c>1$

$$\int_1^c \sin(x^2)\,dx = \int_1^c \underbrace{\frac{1}{x}}_{g}\cdot\underbrace{\left(x\sin(x^2)\right)}_{f}dx$$

suggerisce $y=x^2$

f è facile da integrare: $\int x\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\sin(x^2)\,dx =$

$=$ (posto $y=x^2$) $\frac{1}{2}\int \sin y\,dy = -\frac{1}{2}\cos y = -\frac{1}{2}\cos x^2$.

Tornando sopra,

$$\int_1^c \sin(x^2)\,dx = \int_1^c \frac{1}{x}\cdot\left(x\sin(x^2)\right)dx = \left[\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\cos x^2\right)\right]_1^c +$$

$$-\int_1^c\left(-\frac{1}{2}\cos x^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2c}\cos c^2 + \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}\int_1^c \frac{\cos x^2}{x^2}\,dx$$

$\to 0$ per $c \to +\infty$

$$\left| -\frac{\cos c^2}{2c} \right| \leq \frac{1}{2c}$$

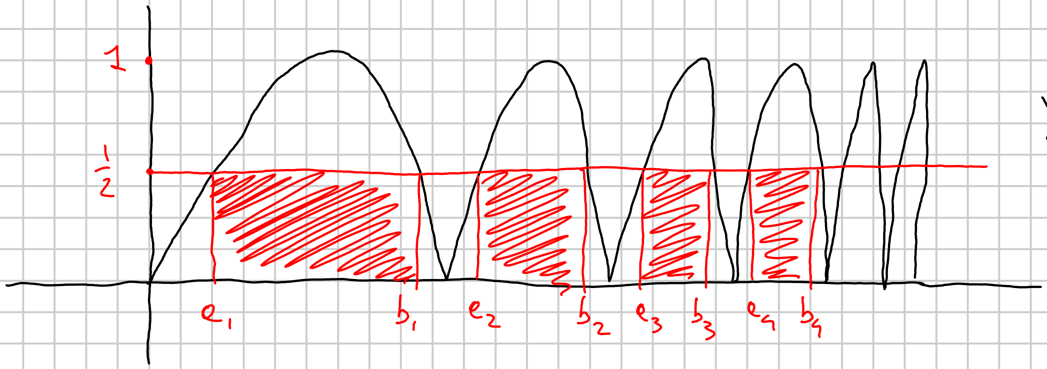
$$\left| \frac{\cos x^2}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Dunque per $c \to +\infty$ questo integrale converge assolutamente

Dunque $\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\cos 1 - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^2}\,dx$

e perciò esiste. Dunque $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ converge.

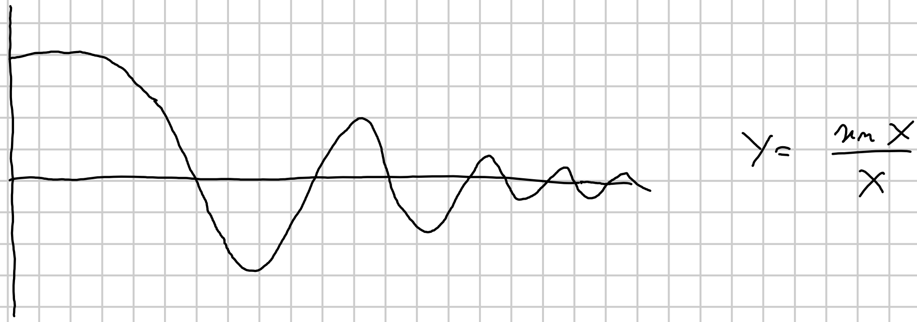
Do solo un'idea del perché non converga assolutamente. I dettagli sono nel foglio di esercizi 13.

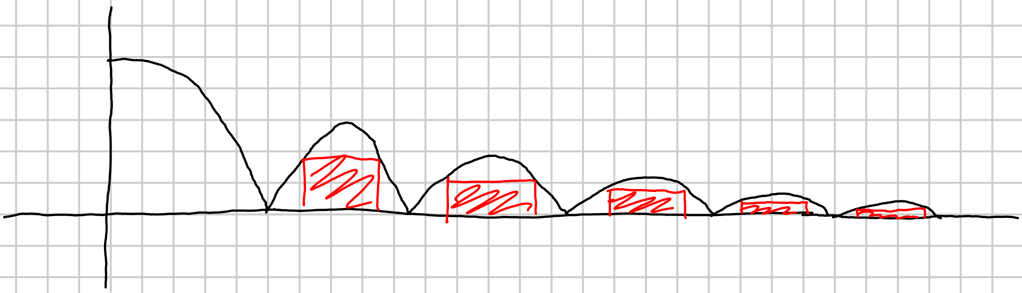


Gli a_i, b_i sono le soluzioni di $|\sin(x^2)| = \frac{1}{2}$ e si trovano esplicitamente. L'area dell'i-esimo rettangolo sarà base $\times$ altezza $= (b_i - a_i)\cdot\frac{1}{2}$. Si può mostrare che $|b_i - a_i| \sim \frac{1}{\sqrt{i}}$, dunque la serie delle aree dei rettangoli si comporta come $\sum \frac{1}{\sqrt{i}}$, che diverge.

Poiché l'area sottesa da $y = |\sin(x^2)|$ è maggiore della somma delle aree dei rettangolini, $\int_1^{+\infty} |\sin(x^2)|\,dx$ diverge.

Idea analoga per mostrare che $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ diverge (fatto in aula la volta scorsa con un metodo diverso):





Questa volta i rettangoli avranno base di lunghezza costante e altezza sempre più piccola. Ma la serie delle aree sarà ancora divergente (dettagli nel foglio 13).

QUALCHE ESERCIZIO

Discutere la convergenza dei seguenti integrali:

$$\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x-4}}\,dx \quad , \quad \int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\,dx .$$

Il primo integrale ha un problema in $x=4$. Al denominatore ho $\sqrt{x-4} = (x-4)^{\frac{1}{2}} = |x-4|^{\frac{1}{2}}$

($x \geq 4$ nell'intervallo di integrazione).

Per usare il confronto dovrei avere una funzione positiva e $1-3x$ è negativa vicino a 4. Raccolgo un segno $-$ e ho
$$\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x-4}}\,dx = -\int_4^5 \frac{3x-1}{\sqrt{x-4}}\,dx$$

Ora confronto con $\dfrac{1}{|x-4|^{\frac{1}{2}}}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\frac{3x-1}{\cancel{\sqrt{x-4}}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{x-4}}}} = 11 \neq 0$,

per cui l'integrale si comporta come $\displaystyle\int_4^5 \frac{1}{|x-4|^{\frac{1}{2}}}\,dx$, che converge poiché $\frac{1}{2} < 1$.

$$\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\,dx = -\int_4^5 \frac{3x-1}{\sqrt{x}-2}\,dx = -\int_4^5 \frac{(3x-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\,dx =$$
$$= -\int_4^5 \frac{(3x-1)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\,dx.$$

Ora il numeratore, vicino a 4, è positivo e tende a 44 per $x \to 4$. Dunque si può usare il confronto asintotico, dal quale risulta $\dfrac{(3x-1)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \sim \dfrac{44}{|x-4|} = \dfrac{44}{|x-4|^1}$,

il cui integrale diverge. Dunque l'integrale
$\displaystyle\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\,dx$ diverge.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x}\,dx$. C'è un problema in 0.

Per $x>0$, $\log(1+\sqrt{x}) > \log 1 = 0$, $x>0 \implies$ integrando >0

per cui posso usare i teoremi di confronto.

Per $x \to 0$, $\log(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$, per cui $\dfrac{\log(1+\sqrt{x})}{x} \sim \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

Verifichiamolo per bene: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log(1+\sqrt{x})}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$

poiché $\sqrt{x} \to 0$

Dunque, poiché $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, anche l'integrale

di partenza converge.