Integrali $\boxed{\text{impropri}}$

Abbiamo definito l'integrale di Riemann di una funzione

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{LIMITATA}$$

INTERVALLO LIMITATO

Oggi ci occuperemo di integrare funzioni (sufficientemente regolari) su intervalli illimitati (ad esempio $[a, +\infty)$ o $(-\infty, a]$) oppure funzioni illimitate su intervalli limitati.

Seguendo la terminologia di Massimo Gobbino, diciamo che un integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ha un problema in a se $a = -\infty$ oppure se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ NON è limitata in un intorno di a; inoltre, $b > a$ è $\neq +\infty$ e $\exists \varepsilon > 0$ tale che $f_{|[a+\varepsilon, b)} : [a+\varepsilon, b) \to \mathbb{R}$ è limitata (cioè non ci sono "altri problemi").

Esempi: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (problema in $-\infty$)

$\displaystyle\int_{0}^{1} \log x \,dx$ (problema in 0 perché $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$)

Analogamente, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ha un problema in b se $b=+\infty$ o se $b\neq+\infty$ ma f non è limitata in nessun intorno di b.

In questi casi (cioè quando c'è solo un problema, e il problema è in un estremo di integrazione) si parla di integrale improprio elementare o monoproblema, e si pone

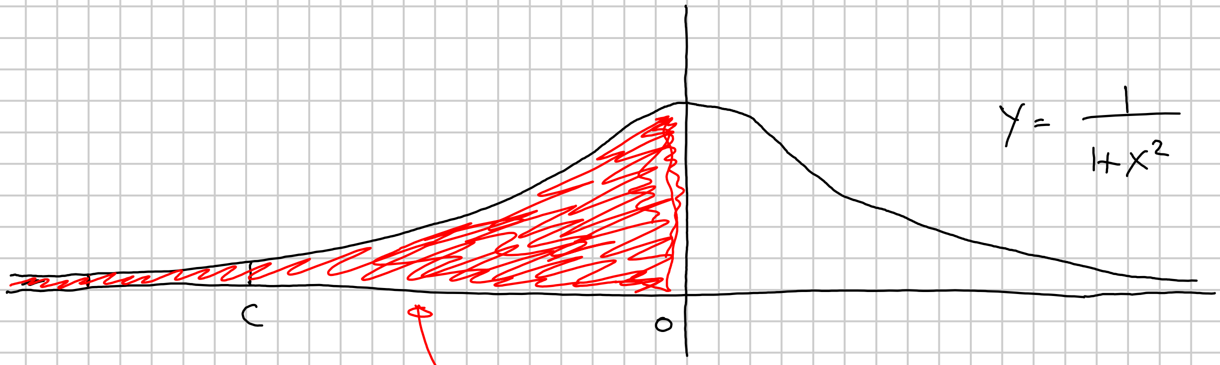
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \overbrace{\int_c^b f(x)\,dx}^{\text{già definito perché } c>a \text{ e } f_{|[c,b]} \text{ è OK}} \qquad \text{(se il problema è in } a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{già definito}} \qquad \text{(se il problema è in } b).$$

Esempi: $$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \Big[\arctan x\Big]_c^0 = \lim_{c\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan c) =$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

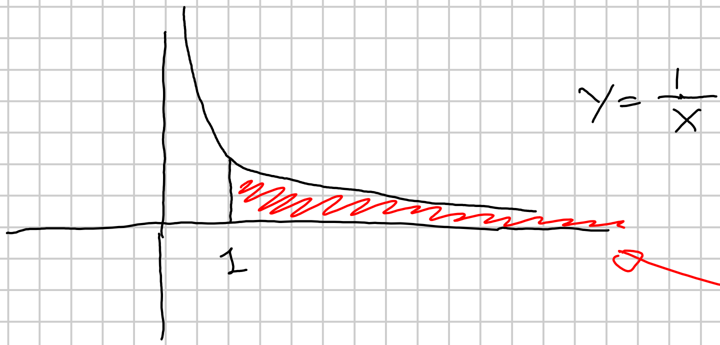


Area finita anche per $c \to -\infty$

Al limite per $c \to -\infty$, calcolo l'area di tutta la porzione di sottografico con ascissa negativa. In questo caso abbiamo trovato un numero finito, $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \Big[\log x\Big]_1^c =$$

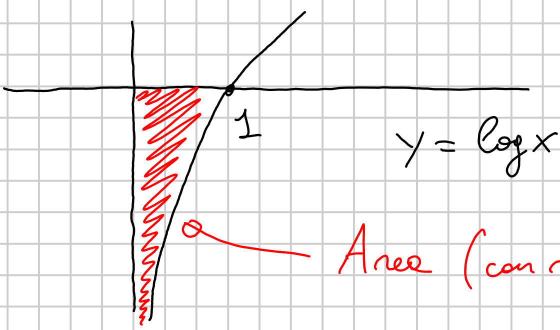
$$= \lim_{c \to +\infty} \left(\log c - \log 1\right) = +\infty$$



Area infinita

$$\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \log x\,dx = \lim_{c \to 0^+} \Big[x \log x - x\Big]_c^1 =$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \Big(1 \cdot \underbrace{\log 1}_{=0} - 1 - \big(\underbrace{c \log c}_{\to 0} - \underbrace{c}_{\to 0}\big)\Big) = -1$$



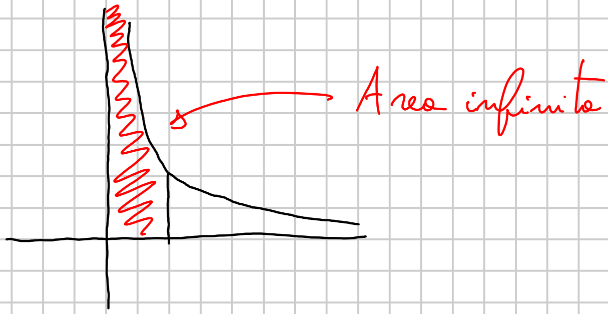
Area (con segno) $= -1$.

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \sin x \, dx = \lim_{c \to +\infty} \left[-\cos x \right]_0^c =$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \left(-\cos c + \cos 0 \right) = \lim_{c \to +\infty} \left(1 - \cos c \right),$$ che non esiste.

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} \, dx = \lim_{c \to 0^+} \left[\log x \right]_c^1 =$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \left(\log 1 - \log c \right) = 0 - (-\infty) = +\infty$$



Trattandosi del risultato di un limite, un integrale improprio monoproblema può essere:

- un numero reale (e allora l'integrale CONVERGE)
- $\pm\infty$ (" " " DIVERGE a $\pm\infty$)
- può non esistere (come nel caso $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$) (e allora si dice INDETERMINATO)

Si studiano anche integrali con "più problemi". In tali casi, si spezza il dominio in modo da ridursi ad integrali monoproblema, e si sommano i risultati, con le solite convenzioni per cui $+\infty - \infty$ è indeterminato, $+\infty + a = +\infty$ $\forall a \in \mathbb{R}$, etc.

Ad esempio, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

funzione limitata, non dà problemi

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

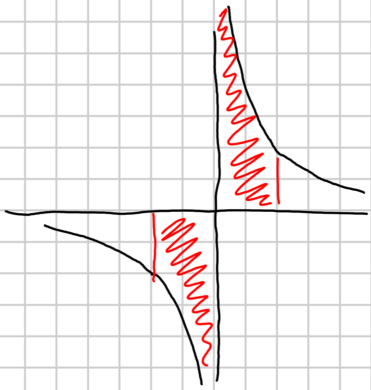
$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx =$ (non è monoproblema, perché il problema non è negli estremi)

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0^-} \int_{-1}^{c} \frac{1}{x}\,dx +$$

$$+ \lim_{c\to 0^+} \int_{c}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0^-} \left(\log|c| - \log|-1|\right) +$$

$$+ \lim_{c\to 0^+} \left(\log 1 - \log c\right) = -\infty + \infty$$

INDETERMINATO



Come per le serie, degli integrali impropri a volte si calcola il valore, ma più spesso si studia solo la convergenza/divergenza, analizzando alcuni casi "fondamentali" e usando poi teoremi di confronto.

Esattamente come molte serie si confrontano con $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, è utile conoscere gli integrali impropri di $\dfrac{1}{x^\alpha}$.

Teorema: Sia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha>0$.

Allora:

① $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge $\Longleftrightarrow$ $\alpha>1$

diverge a $+\infty$ $\Longleftrightarrow$ $\alpha\le 1$

② $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge $\Longleftrightarrow$ $\alpha<1$

diverge a $+\infty$ $\Longleftrightarrow$ $\alpha\ge 1$

Dim.: Il caso $\alpha=1$ è già stato visto negli esempi sopra (si ha sempre divergenza). Sia $\alpha\neq 1$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\int_1^{+\infty}x^{-\alpha}\,dx=\lim_{c\to+\infty}\int_1^c x^{-\alpha}\,dx=$$

uso $\alpha\neq 1$

$$=\lim_{c\to+\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^c=\lim_{c\to+\infty}\left(\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\begin{cases}+\infty-\frac{1}{1-\alpha}=+\infty & \text{se } 1-\alpha>0, \text{ cioè } \alpha<1\\[2mm] 0-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1} & \text{se } 1-\alpha<0, \text{ cioè } \alpha>1\end{cases}$$

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx=\lim_{c\to 0^+}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_c^1=\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}-0=\frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 1-\alpha>0, \text{ cioè } \alpha<1\\[2mm] \frac{1}{1-\alpha}-(-\infty)=+\infty & \text{se } 1-\alpha<0, \text{ cioè } \alpha>1.\end{cases}$$

$\square$

Alcuni fatti elementari.

① Se $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ sono integrali impropri monoproblema, allora
$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
e
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

② Se $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ha solo un problema a $+\infty$, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso comportamento $\forall a \in (0,+\infty)$. Infatti,
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^1 f(x)\,dx}_{\in \mathbb{R}} + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

③ Come appena sfruttato, anche per integrali impropri
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
quando tutti i termini siano definiti.

Tutte queste proprietà si dimostrano usando le analoghe proprietà per integrali propri e passando al limite.

Traslando opportunamente, dal teorema visto sopra si deduce anche:

Teorema: Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Allora

$$\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1,\ b > a \\ -\infty & \text{se } \alpha \geq 1,\ b < a \\ \text{converge} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Dim.: Si deduce dal caso $a = 0$ visto sopra tramite traslando.

INTEGRALI IMPROPRI DI FUNZIONI POSITIVE

Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione con $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Allora $F(c) = \int_0^c f(x)\,dx$ è crescente, in quanto

$$F(c+k) = \int_0^{c+k} f(x)\,dx = \int_0^c f(x)\,dx + \int_c^{c+k} f(x)\,dx =$$

$$= F(c) + \int_c^{c+k} f(x)\,dx$$

≥ 0 se $K \geq 0$ in quanto $f \geq 0$

Dunque $\lim_{c \to +\infty} F(c)$ esiste! (È un numero reale o $+\infty$)

Vale infatti il seguente

Teorema: Se $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è crescente, allora

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \sup \{ g(x),\ x \in (0, +\infty) \}.$$

In particolare, esiste.

Dim.: Identica a quella per successioni crescenti.

Corollario: L'integrale improprio di una funzione non negativa può essere convergente o divergente a $+\infty$, mentre non può essere indeterminato.

Segue inoltre banalmente dalle definizioni che, se $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in (a,b)$, $(a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$

$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ anche per integrali impropri

(come prima, questo segue passando al limite nell'analoga disuguaglianza per integrali propri).

Da questi fatti seguono facilmente i seguenti teoremi di confronto:

non negative

Teorema: $f,g : [M,+\infty) \to \mathbb{R}$. Supponiamo $f(x) \le g(x)$ definitivamente, cioè che esiste $M' \ge M$ con $f(x) \le g(x)$ $\forall x \ge M'$. Allora

1. Se $\int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, anche $\int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ converge
2. Se $\int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, anche $\int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.

Teorema (confronto asintotico): Siano $f,g : [M,+\infty) \to \mathbb{R}$

positive.

① Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, allora

$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ hanno lo stesso comportamento.

② Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e $\int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ converge,

anche $\int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

③ Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e $\int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge,

anche $\int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Esercizi / Esempi.

Si discuta la convergenza dei seguenti integrali impropri.

① $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$. Di sicuro c'è un problema a $+\infty$.

C'è anche un problema in 0, dove si annulla il denominatore.

Studiamo perciò $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$.

L'integrando è positivo per cui posso usare i teoremi di confronto.

Voglio confrontare $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}$ con $\frac{1}{x^\alpha}$ vicino a 0.

Poiché $\frac{\arctan x}{x} \to 1$ per $x\to 0$, mi aspetto

$$\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \xrightarrow{} 1 \quad \sim \frac{1}{\sqrt{x}} .$$ Ed è così:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\arctan x}{\cancel{x\sqrt{x}}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1 .$$

Dunque $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha = \frac{1}{2}$, e perciò

$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$ si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, e converge

Per $x \to +\infty$, $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}$ in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\arctan x}{\cancel{x\sqrt{x}}}}{\frac{\pi}{2}/\cancel{x^{\frac{3}{2}}}} = 1 .$$

Dunque, $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$ si comporta come $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$,

che converge in quanto $\frac{3}{2} > 1$.

Dunque $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$ converge.

Abbiamo usato il fatto che i teoremi di confronto valgono non solo quando un estremo di integrazione è $+\infty$, ma per tutti gli integrali impropri elementari.

2 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$. $\frac{1}{\sin x}$ ha problemi in $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nel nostro caso, solo in 0.

Dunque è un integrale improprio monoproblema.

Su $(0,1)$, $\frac{1}{\sin x} > 0$ per cui posso usare i teoremi di confronto, e poiché $\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$,

otteniamo che $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$,

che DIVERGE.

3) $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} dx$. Ho un solo problema, in $\frac{\pi}{2}$.

Devo capire "come va a 0" $\cos x$ in $\frac{\pi}{2}$.

Varie possibilità:

a) studiare $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}$ per capire per quale α venga finito.

b) operare un cambio di variabile per portarci in 0.

Proviamo a) con $\alpha = 1$. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-\sin x}{-1} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} = 1 \Rightarrow$$

l'integrale diverge in quanto $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|} dx$ diverge

4) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Per $x \geq 1$, $x^2 \geq x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

Poiché $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ per $x \geq 1$ e $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge (visto prima), anche $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$.

TENTATIVO SBAGLIATO $\sqrt{x^3-1}$ dà esponente $\frac{3}{2}$, per cui l'integrale diverge (in quanto $\frac{3}{2} > 1$ e ho un solo problema in 1).

L'errore è nell'asserire che $\sqrt{x^3-1} \sim (x-1)^{\frac{3}{2}}$ per $x \to 1^+$

$(x^3-1)^{\frac{1}{2}}$ è piuttosto diverso da $(x-1)^{\frac{3}{2}}$.

Infatti, $\sqrt{x^3-1} = \sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$ $\to 3$ per $x \to 1$

quel che rimane, che sarà simile a $\sqrt{x^3-1}$

Dunque $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{3}$

$\displaystyle\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ per cui

$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ si comporta come $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx =$

$\displaystyle= \int_1^2 \frac{1}{|x-1|^{\frac{1}{2}}}\,dx$ che converge perché $\frac{1}{2} < 1$.

Cosa possiamo fare se l'integrando non è positivo?

CONVERGENZA ASSOLUTA

Def.: Sia $\int_a^b f(x)\,dx$ un integrale improprio (dove $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Diciamo che l'integrale **CONVERGE ASSOLUTAMENTE** se

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$$

(poiché $|f(x)| \geq 0$ $\forall x$, quest'ultimo integrale può solo convergere o divergere a $+\infty$).

Teorema: Se $\int_a^b f(x)\,dx$ converge assolutamente, allora converge.

Dim.: Identica al caso delle serie, è basata sull'identità
$$f(x) = \left(f(x) - |f(x)|\right) + |f(x)|$$
e sulle disuguaglianze $-2|f(x)| \leq f(x) - |f(x)| \leq 0$.

Infatti, dalla convergenza assoluta di $\int_a^b f(x)\,dx$ si deduce che $\int_a^b 2|f(x)|\,dx$ converge, per cui, per confronto, anche $\int_a^b \left(|f(x)| - f(x)\right)dx$ converge (la funzione $|f(x)| - f(x)$ è ≥ 0, per cui posso applicare il confronto!).

Dunque $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b (|f(x)| - f(x))\,dx$

convergono entrambi

è convergente.

Dunque anche $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente.

Esempi: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$. Non posso usare subito il confronto perché $\dfrac{\sin x}{x^2}$ non ha segno costante.

Provo con l'assoluta convergenza:

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$. Ora posso usare il confronto:

$\dfrac{|\sin x|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ $\forall x \geq 1$. Inoltre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$

Dunque anche l'integrale dato converge.

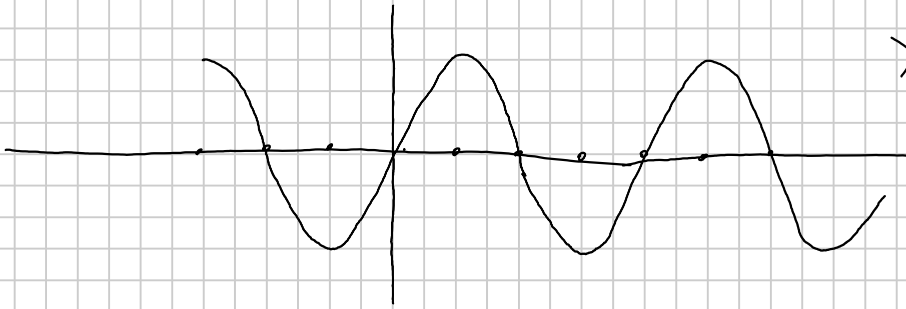
In maniera identica si vede che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ converge.

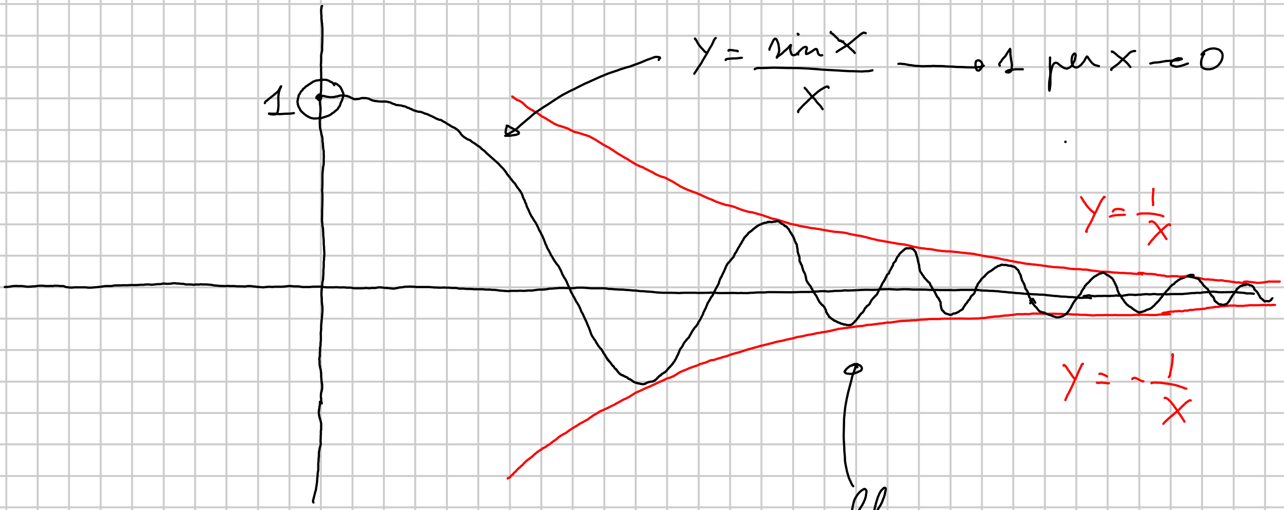
Un integrale improprio che converge ma non assolutamente.

Nel caso delle serie, un esempio era dato da

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Una scelta analoga nel caso di funzioni è data da $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.





Convergenza assoluta: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$

L'unica stima "facile" è $0 \leq \dfrac{|\sin x|}{x} \leq \dfrac{1}{x}$

Però $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge, dunque ???

Fatto (i): $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ diverge.

Supponiamo per assurdo che converga. Poiché

$0 \leq |\sin x| \leq 1$, $\qquad \dfrac{\sin^2 x}{x} = \dfrac{|\sin x|}{x} \cdot |\sin x| \leq \dfrac{|\sin x|}{x}$

Dunque anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ dovrebbe convergere.

Posto $y = x + \frac{\pi}{2}$, ottengo $\sin^2 x = \sin^2\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y$,

e $dy = dx$, per cui $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_{1+\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos^2 y}{y - \frac{\pi}{2}}\,dy$

converge, e (poiché cambiando il primo estremo di integrazione non cambia il comportamento dell'integrale),

anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 y}{y - \frac{\pi}{2}}\,dy < +\infty$. Infine,

$\dfrac{\cos^2 y}{y - \frac{\pi}{2}} \sim \dfrac{\cos^2 y}{y}$ per $y \to +\infty$, perciò

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 y}{y}\,dy$ converge. Dunque

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$$

convergono entrambi

dovrebbe convergere, il che è assurdo.

Dunque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ non può convergere.

Fatto 2: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.

Dim.: Trucco dell'integrazione per parti.

$$\int_1^c \frac{\overset{f}{\sin x}}{\underset{G}{x}}\,dx = \left[\frac{1}{x}(-\cos x)\right]_1^c - \int_1^c \left(-\frac{1}{x^2}\right)(-\cos x)\,dx =$$

$$= \frac{-\cos c}{c} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Ora $\lim_{c \to +\infty} \frac{-\cos c}{c} = 0$ perché $\left| \frac{-\cos c}{c} \right| \leq \frac{1}{c}$.

$\lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge assolutamente dunque converge a un valore $\ell \in \mathbb{R}$

Dunque $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \left(\frac{-\cos c}{c} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right) =$

$$= 0 + \frac{\cos 1}{1} - \ell \in \mathbb{R},$$

perciò l'integrale dato converge.