Lezione 11 marzo

Titolo nota 11/03/2020

Derivate e sue proprietà.

Già dimostrato:

- Regola di Leibniz: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$
- Regola dell'inverso: $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Corollario: $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili, g mai nulla. Allora

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f g'}{g^2}.$$

Dim.:
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' \overset{\text{Leibniz}}{=} f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' =$$

$$= \frac{f'}{g} + f\cdot\left(\frac{-g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Esempio: $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$$f' = \frac{\sin'\cdot\cos - \sin\cdot\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos\cdot\cos + \sin\cdot\sin}{\cos^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2} \\ \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \end{cases}$$

Per derivare arctan, usiamo la formula della funzione inversa.

$f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\quad f(x) = \arctan x$

$g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad g = f^{-1}$, $g(x) = \tan x$

Per quanto già visto, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(f(x))} =$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Analogamente, se $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \sin x$,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\cos(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$\arcsin x = \alpha$, dove α è l'unico reale

$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, per cui $\cos\alpha \geq 0$. Inoltre

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, dunque $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, e

poiché $\cos\alpha \geq 0$, $\quad \cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Infine, da $\arcsin x = \alpha$ otteniamo $\sin\alpha = x$,

per cui $\cos(\arcsin x) = \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, dunque

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{cioè}$$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Analogamente (controllate i domini!)

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Altri esempi: - $(x)' = 1$. Con la definizione,

se $f(x) = x$, $\quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}}{h} = 1.$$

- $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R})$,

$$f'(x) = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

- $f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = (x)' \cdot x + x \cdot (x') = 1 \cdot x + x \cdot 1 =$

$$= 2x$$

(provare anche con il rapporto incrementale!).

Per $n = 0, 1, 2, -1$, se $f(x) = x^n$, $f'(x) = n x^{n-1}$

Ex.: Dimostrare che $f(x) = x^n$ ha derivata

$$f'(x) = n x^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(induzione $\forall n \geq 1$ e altra induzione su x^{-n} $\forall n \geq 1$).

Vale un fatto più generale: Sia $\alpha \in \mathbb{R}$,
$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$. Allora

$$\boxed{f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.}$$

Dim.: Si usa una tecnica "standard": il passaggio all'esponenziale.

$$f(x) = x^\alpha = e^{\log(x^\alpha)} = e^{\alpha \log x}.$$

Dunque $f(x) = g(h(x))$, $h(x) = \alpha \log x$, $g(y) = e^y$.

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{h(x)} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Abbiamo usato $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
(definizione o Leibniz bastano per vederlo).

Esercizi: ① $f(x) = \cos(x \cdot e^x)$

$f = g \circ h$, $h(x) = x e^x$, $g(y) = \cos y$

$$f'(x) = h'(x)\, g'(h(x)) = (\underbrace{1 \cdot e^x + x \cdot e^x}_{(x e^x)'}) \cdot (-\sin(x e^x)) =$$

$$= -e^x (x+1) \sin(x e^x).$$

② $f(x) = \arctan x^2$, $f'(x) = 2x \cdot \dfrac{1}{1 + (x^2)^2} =$

$$= \frac{2x}{1 + x^4}$$

③ $f(x) = x^x$, $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

Applicando $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ottenei

$(x^x)' = x \cdot x^{x-1} = x^x$. Ciò è profondamente

sbagliato (α deve essere costante per avere $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$).

$$x^x = e^{\log x^x} = e^{x \log x} = f(x)$$

$$f'(x) = (x \log x)' \cdot e^{x \log x} = \left(1 \cdot \log x + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot x^x =$$

$$= (\log x + 1) \cdot x^x.$$

MAX/MIN relativi e assoluti di funzioni reali.

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione, $D \subseteq \mathbb{R}$

dominio qualsiasi.

Def.: • Il massimo assoluto di f è

$M = \max\{f(x), x \in D\}$, quando esiste.

• Il minimo assoluto è $m = \min\{f(x), x \in D\}$.

• $x_0 \in D$ è un punto di massimo assoluto

se $f(x_0) = M$, M massimo assoluto di f,

cioè se $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in D$.

• $x_0 \in D$ è un punto di minimo assoluto

se $f(x_0) = m$, cioè $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in D$.

① Il max assoluto può non esistere.
Ad esempio, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
l'immagine non è limitata superiormente e
dunque non ha massimo.
Oppure se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$
$\operatorname{Im} f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, che non ha massimo.
Dunque f non ha max assoluto.

② Se esiste, il max assoluto è unico in quanto è $\max(\operatorname{Im} f)$.

③ Considerazioni identiche valgono per il minimo assoluto.

④ Se il max assoluto esiste, per definizione deve esistere almeno un punto di massimo assoluto.
Infatti, se $M = \max\{f(x), x \in D\}$ esiste,
deve esistere $x_0 \in D$ con $M = f(x_0)$, e x_0
è un punto di massimo assoluto.

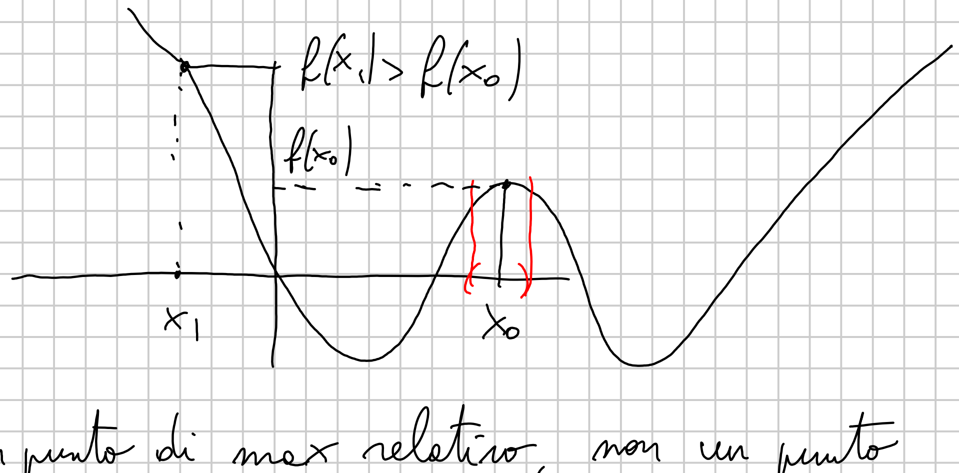
⑤ Il punto di massimo assoluto può non essere unico!

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

Il max assoluto esiste ed è 1, in quanto $\{f(x),\ x\in\mathbb{R}\} = [-1,1]$. Sono punti di massimo assoluto tutti gli x tali che $\sin x = 1$, cioè $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
Ci sono infiniti punti di massimo assoluto.

Def.: $f: D \to \mathbb{R}$. x_0 è un punto di massimo relativo (o locale) se $\exists$ intorno U di x_0 in $\mathbb{R}$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in U \cap D$.
(cioè non per tutti gli x, ma per tutti gli x "sufficientemente vicini" a x_0).

Osservazione: Se x_0 è punto di massimo assoluto, è anche punto di massimo relativo. Il viceversa è falso in generale:



x_0 è un punto di max relativo, non un punto di max assoluto.

Queste definizioni hanno senso $\forall f$ (anche non continue).

Def.: $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo.

$x_0 \in I$ si dice PUNTO STAZIONARIO per f se $f'(x_0)$ esiste e $f'(x_0) = 0$.

(Se x_0 è un estremo di I, $f'(x_0)$ indica la derivata destra o sinistra).

$x_0 \in I$ si dice SINGOLARE se $f'(x_0)$ non esiste.

Teorema (monotonia 1): Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, x_0 un punto INTERNO di I.

① Se $f'(x_0) > 0$, allora $\exists \delta > 0$ tale che

$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e

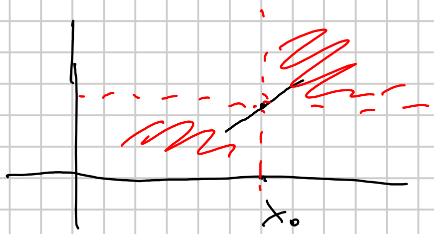
$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

② Se $f'(x_0) < 0$, allora $\exists \delta > 0$ tale che

$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e

$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Dim.:



Se $f'(x_0) > 0$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell > 0$, per cui per permanenza del segno $\exists \delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ (perché x_0 è un punto interno di I) e $\forall k \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$,

$\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k} > 0$, cioè $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad (\text{ho posto } x = x_0+k).$$

Dunque se $x \in (x_0, x_0+\delta)$, poiché $x-x_0>0$ deduciamo $f(x)-f(x_0)>0$, cioè $f(x)>f(x_0)$.

Mentre se $x \in (x_0-\delta, x_0)$, allora $x-x_0<0$, e perciò $f(x)-f(x_0)<0$, cioè $f(x)<f(x_0)$.

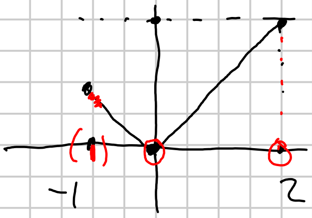
La dimostrazione nel caso $f'(x_0)<0$ è identica.

Corollario: Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, e sia $x_0 \in I$ un punto di max o min relativo. Allora

1. x_0 è stazionario interno, oppure
2. x_0 è singolare,
3. x_0 è un estremo di I.

Dim.: Se non vale né 1, nè 2, né 3, x_0 non può essere un estremo, per cui è interno.
Per 2, $f'(x_0)$ deve esistere, e per 1 si ha $f'(x_0) \neq 0$. Per monotonia 1, si ha allora che x_0 non può essere né di max relativo né di min relativo.

Esempio: Trovare max e min assoluti e relativi di $f: [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.



f è derivabile su tutto $[-1,2]$ tranne che in 0.

$f'(x) = -1$ per $-1 \leq x < 0$

$f'(x) = +1$ per $0 < x \leq 2$

Dunque NON ci sono punti stazionari.

Max / min relativi vanno cercati negli estremi e nei punti singolari.

$f(-1) = |-1| = 1$

$f(2) = |2| = 2$

$f(0) = |0| = 0$

f è continua per cui per Weierstrass $\exists$ di sicuro max e min assoluti.

Visto che i valori possibili per max/min relativi sono solo $0, 1, 2$, e un max assoluto è sempre un max relativo, deduciamo che il max assoluto è 2 e il min assoluto è 0.

Dunque 0 è l'unico punto di minimo assoluto e 2 è l'unico punto di massimo assoluto.

Domanda: -1 è di max / min relativo?

Sì, è un max relativo.

Esempio: Trovare max / min assoluti di

$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$.

f è derivabile su tutto $[-1,1]$, dunque non esistono punti singolari e devo cercare max/min o nei punti stazionari o agli estremi.

$$f'(x) = (x^3)' - (x)' = 3 \cdot x^2 - 1 = 3x^2 - 1$$

$$3x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

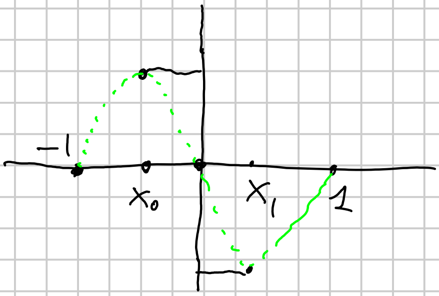
$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ appartengono entrambi al dominio.

$$f(x_0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-1+3}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$f(x_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$f(1) = 0$$



Dunque M = max assoluto $= \frac{2}{3\sqrt{3}}$ e l'unico punto di max assoluto è $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, mentre il min assoluto è $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ con punto di minimo assoluto $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

-1 e 1 sono invece punti di min e max relativo, rispettivamente (calcolare $f'(1)$, $f'(-1)$ e usare monotonia 1).

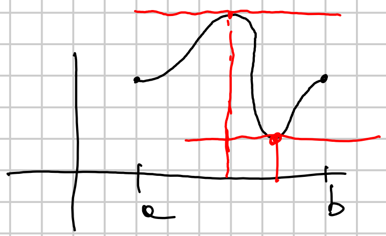
Teorema (di Rolle): Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ tale che:

① f è continua.

② f è derivabile in (a,b) (se è derivabile anche in a e b tanto meglio!)

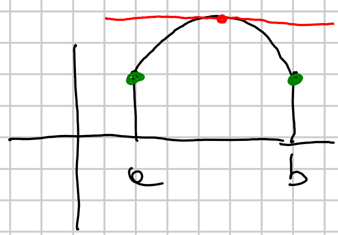
③ $f(a)=f(b)$.

Allora $\exists c \in (a,b)$ tale che $f'(c)=0$.



(qui c non è unico).

Dim.: Per Weierstrass, $\exists$ punto di min assoluto $x_0 \in [a,b]$ e punto di max assoluto $x_1 \in [a,b]$.
Se sono entrambi negli estremi, poiché $f(a)=f(b)$, massimo e minimo assoluto coincidono.
Dunque f è costante, e $f'(c)=0$ $\forall c \in (a,b)$.
Possiamo perciò assumere che almeno uno tra x_0 e x_1, chiamiamolo c, sia interno.
Per ipotesi c non può essere singolare (f è derivabile in (a,b)), dunque deve essere stazionario, cioè $f'(c)=0$.



Teorema (di Cauchy). Siano $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che:

1. f, g siano continue in $[a,b]$
2. f, g siano derivabili in (a,b).

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

$$f'(c)\big(g(b)-g(a)\big) = g'(c)\big(f(b)-f(a)\big).$$

Inoltre, se

3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$,

allora $g(b) \neq g(a)$ e $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Dim.: Definisco $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\varphi(x) = \underbrace{\big(g(b)-g(a)\big)}_{\text{costante}} f(x) - \underbrace{\big(f(b)-f(a)\big)}_{\text{costante}} g(x)$$

φ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) perché lo sono f e g.

Controllo che $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$\varphi(a) = \big(g(b)-g(a)\big) f(a) - \big(f(b)-f(a)\big) g(a) =$$

$$f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - f(b)g(a) + \cancel{f(a)g(a)}$$

$$\varphi(b) = \big(g(b)-g(a)\big) f(b) - \big(f(b)-f(a)\big) g(b) =$$

$$\cancel{f(b)g(b)} - f(b)g(a) - \cancel{f(b)g(b)} + f(a)g(b)$$

Possiamo applicare Rolle, ottenendo l'esistenza di $c \in (a,b)$ con $\varphi'(c)=0$.

Ma $\varphi'(x) = (g(b)-g(a)) \cdot f'(x) - (f(b)-f(a)) \cdot g'(x)$

da cui $0 = (g(b)-g(a)) f'(c) - (f(b)-f(a)) \cdot g'(c)$,

cioè $(g(b)-g'(a)) f'(c) = (f(b)-f(a)) g'(c)$.

Se poi $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, allora $g(a) \neq g(b)$ (altrimenti contraddirei Rolle applicato a g). Dunque posso portare al denominatore sia $g(b)-g(a)$ sia $g'(c)$ ottenendo

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Teorema di Lagrange: Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con

① f continua in $[a,b]$

② f derivabile in (a,b).

Allora $\exists c \in (a,b)$ con

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dim.: Basta applicare Cauchy con $g(x)=x$.

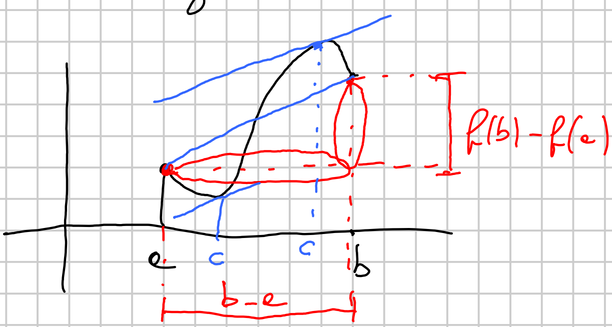
$g'(x)=1 \ \forall x \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ con

$$\frac{f'(c)}{\underbrace{g'(c)}_{=1}} = \frac{f(b)-f(a)}{\underbrace{g(b)-g(a)}_{b-a}}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Interpretazione geometrica:



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$\shortparallel$
coefficiente angolare della retta blu

Teorema (di monotonia 2). $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora:

1. $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \iff f$ è debolmente crescente.
2. $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \iff f$ è debolmente decrescente.
3. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \implies f$ è strettamente crescente
4. $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \implies f$ è strettamente decrescente.

Dim.: Dimostriamo 1 e 3, le altre sono identiche.

1 $\Longleftarrow$ Dato $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

≥ 0 perché f è debolmente crescente e $x \to x_0^+$

> 0 perché $x \to x_0^+$

Dunque $f'(x_0)$ è limite di una funzione ≥ 0, e perciò $f'(x_0) \geq 0$.

$\Longrightarrow$ Siano $x, y \in [a, b]$ con $x < y$.
Posso applicare Lagrange alla restrizione di f a $[x, y]$, ottenendo

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \quad \text{per qualche } c \in (x, y).$$

Ora $y - x > 0$, $f'(c) \geq 0 \Longrightarrow f(y) - f(x) \geq 0$, cioè $f(y) \geq f(x)$. Dunque f è debolmente crescente.

(3) Come sopra, dati $x < y$ ottengo

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c).$$

Ora $f'(c) > 0$ implica $f(y) - f(x) > 0$ e perciò $f(y) > f(x)$.

Osservazione: $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$ è strettamente crescente ma $f'(0) = 0$.

Dunque strettamente crescente $\not\Longrightarrow$ $f'(x) > 0 \ \forall x$.

$y = x^3$