Sebastiano Francaviglia

ESERCIZI di

MATEMATICA

Ad uso dei precorsi di Ingegneria

Pisa - settembre 2005

Indice

I Preliminari **1**

I.1 Potenze . . . 1

Esercizio I.1.1 . . . 1

Esercizio I.1.2 . . . 3

Esercizio I.1.3 . . . 6

Esercizio I.1.4 . . . 10

Esercizio I.1.5 . . . 10

I.2 Logaritmi . . . 11

Esercizio I.2.1 . . . 11

Esercizio I.2.2 . . . 11

Esercizio I.2.3 . . . 12

Esercizio I.2.4 . . . 14

I.3 Geom. Analitica . . . 18

Esercizio I.3.1 . . . 18

Esercizio I.3.2 . . . 22

Esercizio I.3.3 . . . 25

Esercizio I.3.4 27
Esercizio I.3.5 29
Esercizio I.3.6 32
Esercizio I.3.7 32
Esercizio I.3.8 33
Esercizio I.3.9 38
Esercizio I.3.10 45
Esercizio I.3.11 46
Esercizio I.3.12 47
Esercizio I.3.13 48
Esercizio I.3.14 49
Esercizio I.3.15 50
Esercizio I.3.16 52
Esercizio I.3.17 53
Esercizio I.3.18 54
Esercizio I.3.19 55
Esercizio I.3.20 58
Esercizio I.3.21 58
Esercizio I.3.22 59
Esercizio I.3.23 60
Esercizio I.3.24 61
Esercizio I.3.25 61
Esercizio I.3.26 61

Esercizio I.3.27 62
Esercizio I.3.28 63
Esercizio I.3.29 63
Esercizio I.3.30 64
Esercizio I.3.31 65
Esercizio I.3.32 67
I.4 Funzioni. 69
Esercizio I.4.1 69
Esercizio I.4.2 72
Esercizio I.4.3 76
Esercizio I.4.4 77
Esercizio I.4.5 78
I.4.1 Manipolazioni 79
Esercizio I.4.6 82
Esercizio I.4.7 84
Esercizio I.4.8 87
Esercizio I.4.9 88
Esercizio I.4.10 88
Esercizio I.4.11 90
Esercizio I.4.12 91
Esercizio I.4.13 91
Esercizio I.4.14 92
Esercizio I.4.15 92

Esercizio I.4.16 93
I.5 Polinomi. 94
Esercizio I.5.1 94
Esercizio I.5.2 95
Esercizio I.5.3 97
Esercizio I.5.4 98
Esercizio I.5.5 98
Esercizio I.5.6 100
Esercizio I.5.7 103
Esercizio I.5.8 105
Esercizio I.5.9 111
Esercizio I.5.10 112
Esercizio I.5.11 113
Esercizio I.5.12 115
Esercizio I.5.13 117
Esercizio I.5.14 120
Esercizio I.5.15 120
Esercizio I.5.16 121
Esercizio I.5.17 121
Esercizio I.5.18 122
I.6 Trigonometria 123
Esercizio I.6.1 123
Esercizio I.6.2 123

Esercizio I.6.3 125
Esercizio I.6.4 127
Esercizio I.6.5 127
Esercizio I.6.6 129
Esercizio I.6.7 130
Esercizio I.6.8 133
Esercizio I.6.9 134
Esercizio I.6.10 140
Esercizio I.6.11 140
Esercizio I.6.12 142
Esercizio I.6.13 145
Esercizio I.6.14 147
Esercizio I.6.15 151
Esercizio I.6.16 152
Esercizio I.6.17 154
Esercizio I.6.18 157
Esercizio I.6.19 162
Esercizio I.6.20 162
Esercizio I.6.21 163
Esercizio I.6.22 164
Esercizio I.6.23 164
Esercizio I.6.24 164
Esercizio I.6.25 164

Esercizio I.6.26 165
Esercizio I.6.27 166
Esercizio I.6.28 166
Esercizio I.6.29 167
Esercizio I.6.30 167
Esercizio I.6.31 168
Esercizio I.6.32 168
I.7 Disequazioni 170
Esercizio I.7.1 170
Esercizio I.7.2 172
Esercizio I.7.3 179
Esercizio I.7.4 188
Esercizio I.7.5 190
Esercizio I.7.6 200
Esercizio I.7.7 202
Esercizio I.7.8 208
Esercizio I.7.9 214
Esercizio I.7.10 214
Esercizio I.7.11 214
Esercizio I.7.12 214
Esercizio I.7.13 215
Esercizio I.7.14 215
Esercizio I.7.15 216

PREFAZIONE

Questo testo di esercizi contiene la soluzione degli esercizi proposti nella dispensa "Precorso di Matematica" edita dal SEU.

Naturalmente il tutto è esposto in lingua volgare.

S.F.

Pisa settembre 2005

Capitolo I

Preliminari

I.1 Potenze.

Esercizio I.1.1

Calcolare le seguenti potenze:

$$\text{i)}\ \left(5^4\right)^{\frac{3}{4}}. \quad \text{ii)}\ \left(7^3\right)^{\frac{2}{3}}. \quad \text{iii)}\ \left(2^4\right)^{\frac{5}{4}}.$$

$$\text{iv)}\ \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}. \quad \text{v)}\ \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}. \quad \text{vi)}\ \left(2^5\right)^{\frac{3}{5}}.$$

$$\text{vii)}\ \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}. \quad \text{viii)}\ \left(36\right)^{\frac{3}{2}}. \quad \text{ix)}\ 2^{(2^3)}.$$

$$\text{x)}\ \left(2^2\right)^{3}. \quad \text{xi)}\ \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad \text{xii)}\ \left(\frac{3^2}{5^3}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Soluzioni.

i) $\left(5^4\right)^{\frac{3}{4}} = 5^{4\cdot\frac{3}{4}} = 5^3 = 125\,.$

ii) $\left(7^3\right)^{\frac{2}{3}} = 7^{3\cdot\frac{2}{3}} = 7^2 = 49\,.$

iii) $\left(2^4\right)^{\frac{5}{4}} = 2^{4\cdot\frac{5}{4}} = 2^5 = 32\,.$

iv) $\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\cdot\frac{3}{2}} = 2^3 = 8\,.$

v) $\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{3\cdot\frac{2}{3}} = 3^2 = 9\,.$

vi) $\left(2^5\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{5\cdot\frac{3}{5}} = 2^3 = 8\,.$

vii) $\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\cdot\frac{3}{2}} = 2^3 = 8\,.$

viii)
$$\begin{aligned}(36)^{\frac{3}{2}} &= (4\cdot 9)^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}}\cdot(3^2)^{\frac{3}{2}} = \\ &= 2^{2\cdot\frac{3}{2}}\cdot 3^{2\cdot\frac{3}{2}} = 2^3\cdot 3^3 = 8\cdot 27 = 216\,.\end{aligned}$$

ix) $2^{2^3} = 2^8 = 256\,.$

ix) $\left(2^2\right)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64\,.$

xi) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2^{3\cdot\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{4}{9}\,.$

xii) $\left(\dfrac{3^2}{5^3}\right)^{\frac{1}{6}} = \dfrac{3^{2\cdot\frac{1}{6}}}{5^{3\cdot\frac{1}{6}}} = \dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{5}}\,.$

Esercizio I.1.2

Disporre in ordine crescente le seguenti potenze.

i) $2^{\frac{1}{3}}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}$, $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{4}$, $(0,3)^5$, $(0,2)^6$.

ii) $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{3}{4}}$, 2^{-2} .

iii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$.

Soluzioni

1) Notiamo che la seconda potenza si può scrivere come $3^{\frac{1}{2}}$. Inoltre le prime due potenze sono maggiori di 1, mentre le ultime quattro sono minori di 1. Confrontiamo le prime due.

$$2^{\frac{1}{3}} \gtrless 3^{\frac{1}{2}} \iff 2^{\frac{2}{6}} \gtrless 3^{\frac{3}{6}} \iff \left(2^2\right)^{\frac{1}{6}} \gtrless \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}} \iff$$

$$\iff 2^2 \gtrless 3^3 \iff 4 \gtrless 9\,.$$

nell'ultimo passaggio vale la disuguaglianza inferiore, quindi vale la disuguaglianza inferiore anche nel primo. Il risultato è

$$2^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

per confrontare gli altri quattro numeri, li scriviamo come potenze di frazioni aventi a denominoatore il minimo comune multiplo dei denominatori che è 20.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3} = \left(\frac{15}{20}\right)^{3}\,,$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{12}{20}\right)^4 ,$$

$$(0,3)^5 = \left(\frac{3}{10}\right)^5 = \left(\frac{6}{20}\right)^5 ,$$

$$(0,2)^6 = \left(\frac{2}{10}\right)^6 = \left(\frac{4}{20}\right)^6 .$$

Tenendo conto delle proprietà delle potenze in base minore di 1, otteniamo le seguenti catene di disuguaglianze.

$$\frac{15}{20} > \frac{12}{20} \implies \left(\frac{15}{20}\right)^3 > \left(\frac{12}{20}\right)^3 > \left(\frac{12}{20}\right)^4 .$$

$$\frac{12}{20} > \frac{6}{20} \implies \left(\frac{12}{20}\right)^4 > \left(\frac{6}{20}\right)^4 > \left(\frac{6}{20}\right)^5 .$$

$$\frac{6}{20} > \frac{4}{20} \implies \left(\frac{6}{20}\right)^5 > \left(\frac{4}{20}\right)^5 > \left(\frac{4}{20}\right)^6 .$$

I numeri in ordine crescente sono:

$$(0,2)^6 < (0,3)5 < \left(\frac{3}{5}\right)^4 < \left(\frac{3}{4}\right)^3 < 2^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

ii)

L'ordine crescente è dato dall'ordine crescente degli esponenti, perché si tratta di potenze aventi tutte la stessa base > 1. Quindi, essendo $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$, è

$$2^{-2} < 2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{3}{4}} .$$

iii)

In questo caso la base è < 1. Quindi l'ordine crescente è dato dall'ordine decrescente degli esponenti.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Esercizio I.1.3

Risolvere le seguenti equazioni.

i) $2^{-x} = 32$.
ii) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$.
iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^7$.
iv) $3^{|x^2-3x+2|} = 9^{x+1}$.

Soluzioni.

i)

Poiché è $32 = 2^5$, si può scrivere l'equazione come:

$$2^{-x} = 2^5 \iff -x = 5 \iff x = 5\,.$$

ii)

Possiamo scrivere le potenze di 3 come

$$3^{4\sqrt{x}} = \left(3^{\sqrt{x}}\right)^4 \quad , \quad 3^{2\sqrt{x}} = \left(3^{\sqrt{x}}\right)^2 .$$

Allora, ponendo $3^{\sqrt{x}} = t$, possiamo scrivere l'equazione come

$$t^4 - 4t^2 + 3 = 0\,.$$

Si tratta di una equazione biquadratica da cui ricaviamo che deve essere

$$t^2 = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1\,.$$

L'equazione $t^2 = 3$ fornisce $t = \pm\sqrt{3}$, l'equazione $t^2 = 1$ fornisce $t = \pm 1$.

Poiché deve essere $3^{\sqrt{x}} = t$ dobbiamo scartare le radici negative ed avanzano due casi.

$$3^{\sqrt{x}} = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \,,$$

che fornisce

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2} \implies x = \frac{1}{4} \,.$$

L'altro caso è

$$3^{\sqrt{x}} = 1 = 3^0 \,,$$

che fornisce

$$\sqrt{x} = 0 \implies x = 0 \,.$$

iii)

Possiamo scrivere l'equazione come

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^7 \iff \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-7} \,,$$

quindi la soluzione è $x=-7$.

iv)

Poiché è $9=3^2$, possiamo scrivere l'equazione come

$$3^{|x^2-3x+2|} = 3^{2(x+1)} \,,$$

questa equazione è soddisfatta se, e solo se, è soddisfatta l'equazione

$$|x^2 - 3x + 2| = 2(x + 1) .$$

Ci sono varie tecniche per studiare una equazione in cui compare un valore assoluto. Si può studiare il segno dell'argomento del valore assoluto e scrivere le due diverse equazioni di secondo grado che ne vengono fuori. Oppure, nel nostro caso, possiamo fare delle considerazioni generali. Anzi tutto le eventuali soluzioni devono essere tali che $(x+1)$ sia non negativo perché il primo membro è non negativo. Deve, quindi, essere $x + 1 \geq 0$ cioè $x \geq -1$. Soddisfatta tale condizione possiamo elevare al quadrato ambo i membri dell'equazione senza pericolo di introdurre nuove soluzioni da scartare. Otteniamo che deve essere

$$x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x \ = \ 4x^2 + 8x + 4 \iff$$

$$\iff \ x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 20x \ = \ 0 .$$

Nell'ultimo membro mettiamo in evidenza un x, otteniamo che deve essere

$$x(x^3 - 6x^2 + 9x - 20) \ = \ 0 .$$

Le eventuali radici intere del polinomio di terzo grado devono essere dei divisori di 20. Procedendo per tentativi si trova che 5 è una radice. Eseguiamo la divisione del polinomio di terzo grado per $(x - 5)$. Otteniamo la scomposizione finale

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 20x \ = \ x(x - 5)(x^2 - x + 4) .$$

Il polinomio di secondo grado ottenuto ha discriminante negativo

$$\Delta \ = \ 1 - 16 = -15 ,$$

quindi non è ulteriormente scomponibile. Le uniche radici reali del polinomio di quarto grado sono $x = 0$ ed $x = 5$ che sono le uniche soluzioni dell'equazione di partenza.

Esercizio I.1.4

Determinare i valori di α, β, γ che rendono vere le seguenti uguaglianze.

i) $(2^7)^\alpha = 2^{21}$.
ii) $2^7 + 2^7 = 2^\beta$.
iii) $2^7 \cdot 2^7 = 2^\gamma$.

Soluzioni.

$$i)\ (2^7)^\alpha = 2^{7\cdot\alpha} = 2^{21} \iff 7\cdot\alpha = 21 \iff \alpha = 3\,.$$

$$ii)\ 2^7 + 2^7 = 2\cdot 2^7 = 2^{7+1} = 2^8 = 2^\beta \iff \beta = 8\,.$$

$$iii)\ 2^7 \cdot 2^7 = 2^{7+7} = 2^{14} = 2^\gamma \iff \gamma = 14\,.$$

Esercizio I.1.5

Determinare i valori di α, β, γ che rendono vere le seguenti uguaglianze.

i) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[\alpha]{5}$.
ii) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[\beta]{5}$.
iii) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[\gamma]{3}$.

Soluzioni.

$$i)\ \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5} = \sqrt[\alpha]{5} \iff \alpha = 6\,.$$

$$ii)\ \sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^3}} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = \sqrt[\beta]{5} \iff \beta = 2$$

$$iii)\ \sqrt[5]{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt[5]{3} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = 3^{\frac{5}{20}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} = \sqrt[\gamma]{3} \iff \gamma = 4$$

I.2 Logaritmi.

Esercizio I.2.1

Calcolare, a mano, i seguenti numeri.

i) $\log_2(32 \cdot 8^4)$, ii) $9^{\log_3(5)}$, iii) $5^{2+\log_5(3)}$.

Soluzioni.

$$i)\ \log_2(32 \cdot 8^4) = \log_2\left(2^5 \cdot (2^3)^4\right) = \log_2\left(2^{5+3\cdot 4}\right) = \log_2\left(2^{17}\right) = 17 .$$

$$ii)\ 9^{\log_3(5)} = \left(3^2\right)^{\log_3(5)} = 3^{2\cdot\log_3(5)} = 3^{\log_3(5^2)} = 3^{\log_3(25)} = 25 .$$

$$iii)\ 5^{2+\log_5(3)} = 5^{\log_5(5^2)+\log_5(3)} = 5^{\log_5(5^2\cdot 3)} = 5^{\log_5(75)} = 75 .$$

Esercizio I.2.2

Determinare gli x reali per cui sono valide le seguenti uguaglianze.

i) $\log_2\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \log_2(x) - \log_2(x-1)$.

ii) $\log\left((x+1)^2\right) = 2\log(x+1)$.

Soluzioni.

i)

Il logaritmo a primo membro esiste solo se x ed $x-1$ sono entrambi positivi oppure entrambi negativi. Il secondo membro esiste se, e solo se, sia x che $x-1$ sono positivi. L'uguaglianza è valida, quindi, soltanto per $x > 1$.

ii)

Il primo membro ha senso per $x+1 \neq 0$, il secondo membro ha senso solo per $x+1>0$. L'uguaglianza è valida, quindi, per $x>-1$.

Esercizio I.2.3

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche.

i)	$\log_x(64)=6$.	ii)	$\log_{\frac{1}{2}}(16)=x$.
iii)	$\log_7(x)=\frac{1}{3}$.	iv)	$\log_x(x^2)=1$.
v)	$\log_{\sqrt{2}}(x)=\frac{2}{3}$.	vi)	$\log_{2x}(x^2)=3$.

Soluzioni.

i)

Notiamo che è $64=2^6$. Quindi è

$$\log_x(64)=6 \iff 6\log_x(2)=6 \iff \log_x(2)=1 \iff x=2\,.$$

ii)

Notiamo che è $\log_{\frac{1}{2}}(16)=\log_{\frac{1}{2}}(2^4)=-4$. Quindi è $x=-4$.

iii)

Eleviamo 7 ad ambo i membri, otteniamo che è

$$7^{\log_7(x)} = 7^{\frac{1}{3}} \iff x = \sqrt[3]{7}\,.$$

iv)

Notiamo che deve essere $x>0$ e $x \neq 1$. Per tali x è sempre $\log_x(x)=1$ per cui è sempre $\log_x(x^2)=2\log_x(x)=2$. L'equazione non ha soluzioni.

Alternativamente possiamo osservare che qualsiasi logaritmo vale 1 soltanto se la base euguale all'argomento. Quindi dovrebbe essere $x = x^2$, cioè $x = 0$ oppure $x = 1$. Valori esclusi dalla validità dell'equazione.

v)

Eleviamo $\sqrt{2}$ ad ambo i membri, otteniamo che deve essere:

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}}(x)} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}} \iff x = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \iff$$

$$\iff x = 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} \iff x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\,.$$

vi)

In base alla definizione di logaritmo, l'equazione ha senso solo se, e solo se è $x > 0$ e $x \neq \frac{1}{2}$. Per tali x possiamo scrivere il numero 3 come:

$$3 = \log_{2x}\left(2x\right)^3 .$$

L'equazione diviene

$$\log_{2x}(x^2) = \log_{2x}\left(2x\right)^3 .$$

La precedente uguaglianza implica che deve essere

$$x^2 = (2x)^3 \iff x^2(8x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ oppure } x = \frac{1}{8}\,.$$

Tenuto conto delle condizioni di esistenza dell'equazione, l'unica soluzione è $x = \dfrac{1}{8}$.

Esercizio I.2.4

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche.

i) $\log(x-2) - \log(2x - 1_{=}0$.

ii) $\log_{10}(x) + \log_{10}(2x) + \log_{10}(4x) = -3$.

iii) $x^{\log_x (x+3)^2} = 16$.

iv) $2\Big(\log_7(x)\Big)^5 = 5\log_7(x) - 3\Big(\log_7(x)\Big)^3.$

v) $\log_2(x) + \log_x(2) = 2$.

vi) $\log(\sqrt{x+1}) + \log(\sqrt{x-1}) = 1$.

Soluzioni.

i)

L'equazione ha senso soltanto se esistono ambedue i logaritmi. Quindi deve essere

$$\begin{cases} x-2>0\,, \\ 2x-1>0\,, \end{cases} \iff \begin{cases} x>2\,, \\ x>\frac{1}{2}\,, \end{cases} \iff x>2\,.$$

Allora l'equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x>2\,, \\ x-2=2x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x>2\,, \\ x=-1\,, \end{cases}$$

L'ultimo sistema è incompatibile, quindi l'equazione non ammette soluzioni.

Lo studente stia attento al fatto che non basta uguagliare gli argomenti dei logaritmi, ma occorre anche tener conto delle condizioni per la loro esistenza.

ii)

L'equazione ha senso soltanto per $x > 0$. Per tali x possiamo scrivere

$$\log_{10}(x) + \log_{10}(2x) + \log_{10}(4x) = \log_{10}\Big(x \cdot (2x) \cdot (4x)\Big) =$$

$$= \log_{10}(2^3 \cdot x^3) = 3\log_{10}(2x) .$$

L'equazione da risolvere diviene

$$3\log_{10}(2x) = -3 \iff \log_{10}(2x) = -1 \iff$$

$$\iff 2x = \frac{1}{10} \iff x = \frac{1}{20} .$$

iii)

Questa equazione appare mostruosa, ma c'è molto fumo e poco arrosto. Cominciamo scrivendo 16 come 2^4 ed osservando che l'equazione ha senso per $x > 0$ e $x \neq 0$. Inoltre sfruttiamo l'identità

$$a^{\log_a(b)} = b ,$$

per ogni coppia a ,b per cui la scrittura ha senso. Allora la potenza a primo membro vale semplicemente $(x+3)^2$, e l'equazione diviene

$$(x+3)^2 = 2^4 \iff x+3 = \pm 4 \iff x = 1 \text{ oppure } x = -7$$

Nessuno dei due valori trovati è compatibile con le condizioni di esistenza dell'equazione, quindi la stessa non ha soluzioni.

iv)

$$2\Big(\log_7(x)\Big)^5 = 5\log_7(x) - 3\Big(\log_7(x)\Big)^3$$

L'equazione ha senso soltanto per $x > 0$. Poiché compaiono potenze diverse dello stesso logaritmo, poniamo $\log_7(x)=t$. Otteniamo l'equazione

$$2t^5 \;=\; 5t - 3t^3\,,$$

che è equivalente alla seguente equazione

$$t(2t^4 + 3t^2 - 5) \;=\; 0\,.$$

Abbiamo la soluzione $t=0$, cioè $x=1$ compatibile. Risolviamo la restante biquadratica.

$$t^2 \;=\; \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{4} \;=\; \frac{-3 \pm 7}{4}\,.$$

L'unica soluzione non negativa è

$$t^2 \;=\; \frac{-3+7}{4} \;=\; 1\,.$$

Quindi le soluzioni sono

$$t \;=\; \pm 1 \;\Longrightarrow\; \log_7(x) \;=\; \pm 1 \;\Longrightarrow\; x = 7 \text{ oppure } x = \frac{1}{7}\,.$$

Ambedue i valori trovati sono compatibili con le condizioni di esistenza dell'equazione.

Riassumendo, abbiamo le tre soluzioni

$$x = \frac{1}{7} \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = 7 \,.$$

v)

$$\log_2(x) + \log_x(2) = 2 \,.$$

L'equazione ha senso per $x > 0$ e per $x \neq 0$. Usando la formula del cambiamento di base l'equazione diviene.

$$\log_2(x) + \frac{\log_2(2)}{\log_2(x)} \;=\; 2 \,.$$

Moltiplicando ambo i membri per $\log_2(x)$ otteniamo l'equazione equivalente

$$\Big(\log_2(x)\Big)^2 - 2\log_2(x) + 1 \;=\; 0 \;\iff\; \Big(\log_2(x) - 1\Big)^2 \;=\; 0 \,.$$

La soluzione è

$$\log_2(x) \;=\; 1 \;\iff\; x = 2$$

vi)

$$\log(\sqrt{x+1}) + \log(\sqrt{x-1}) = 1 \,.$$

L'equazione ha senso se, e solo se, sia $(x-1)$ che $(x+1)$ sono non negativi, cioè se è $x \geq 1$. Sfruttando la formula del logaritmo del prodotto, otteniamo l'equazione equivalente

$$\log\Big(\sqrt{x^2-1}\Big) \;=\; 1 \,,$$

la cui soluzione è

$$\sqrt{x^2-1} \;=\; e \;\iff\; x^2 - 1 \;=\; e^2 \;\iff\; x \;=\; \pm\sqrt{e^2+1} \,.$$

I.3 Piano Cartesiano e Geometria Analitica.

Esercizio I.3.1

Rappresentare nel piano cartesiano gli insiemi di punti $\underline{x}$ le cui coordinate verificano le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{rlrl} \text{i)} & |x| < 1\,, & \text{ii)} & |y| > 2\,, \\ \text{iii)} & x \geq y\,, & \text{iv)} & xy > 0\,, \\ \text{v)} & |x-2| < 1\,, & \text{vi)} & |y+3| < 1\,. \end{array}$$

Soluzioni.

i)

Si tratta dell'insieme X dei punti del piano che soddisfano la condizione $-1 < x < 1$ ed y varia in $\mathbb{R}$. L'insieme è una striscia verticale di piano ed è rappresentato nella seguente figura I.1 di pagina 19. Le linee tratteggiate non fanno parte dell'insieme.

ii)

Si tratta dell'insieme X dei punti del piano che soddisfano la condizione $y < -2$ oppure $y > 2$, x varia in $\mathbb{R}$. L'insieme è la parte esterna ad una striscia orizzontale di piano ed è rappresentato nella seguente figura I.2 di pagina 19. Le linee tratteggiate non fanno parte dell'insieme.

iii)

Si tratta dell'insieme X dei punti del piano che stanno al disotto della bisettrice del I e III quadrante. La linea di frontiera fa parte dell'insieme.

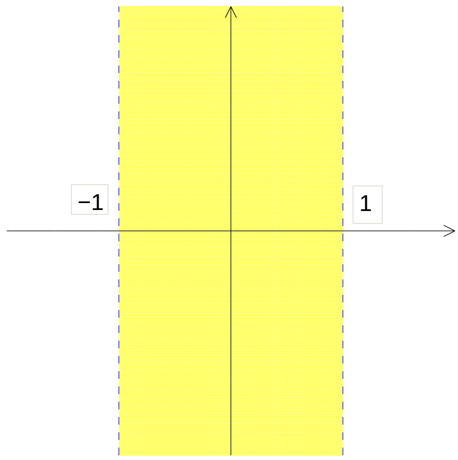


Figura I.1: $X = \{x \in \mathbb{R} |\ |x| < 1\}$.

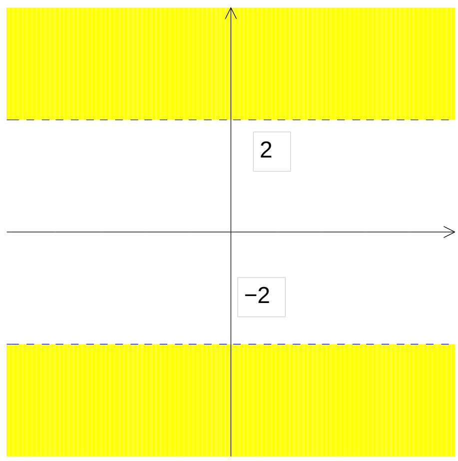


Figura I.2: $X = \{x \in \mathbb{R} |\ |y| > 2\}$.

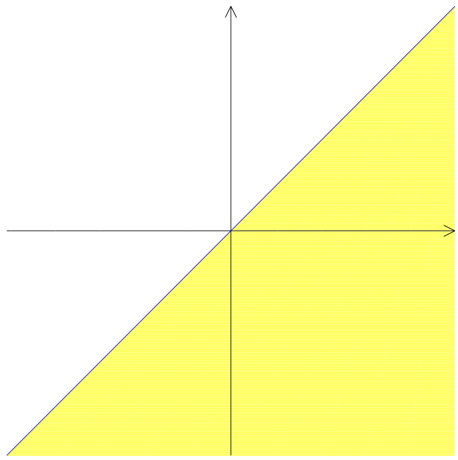


Figura I.3: $X = \{x \in \mathbb{R} | \, x \leq y \, \}$.

iv)

Si tratta dell'insieme X dei punti del piano che stanno al nel I o nel III quadrante in cui x e y hanno lo stesso segno, positivo nel T quadrante, negativo nel III quadrante. La linea di frontiera non fa parte dell'insieme.

v)

Si tratta della striscia di piano verticale con l'ascissa compresa fra 1 e 3. Le linee di frontiera non fanno parte dell'insieme.

vi)

Si tratta della striscia di piano orizzontale con l'ordinata compresa fra -4 e -2. Le linee di frontiera non fanno parte dell'insieme.

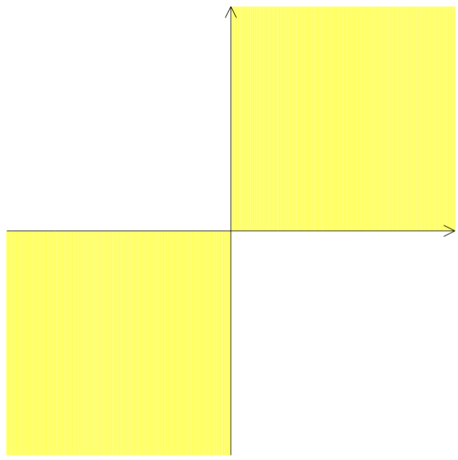


Figura I.4: $X = \{x \in \mathbb{R} |\, xy > 0\,\}$.

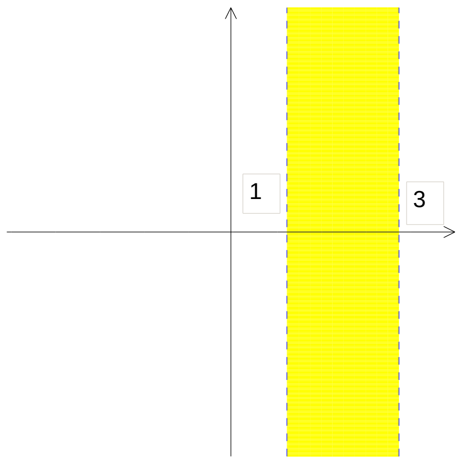


Figura I.5: $X = \{x \in \mathbb{R} |\, |x-2| < 1\,\}$.

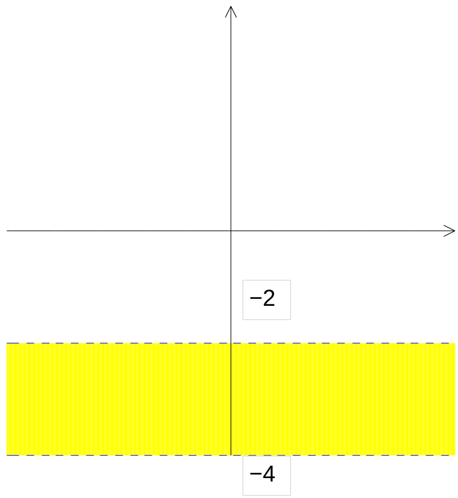


Figura I.6: $X = \{x \in \mathbb{R} |\, |y+3| < 1\,\}$.

Esercizio I.3.2

Dati i punti $\underline{x}_1 \equiv (2,0)$, $\underline{x}_2 \equiv (0,1)$, $\underline{x}_3 \equiv (1,1)$, $\underline{x}_4 \equiv (4,-1)$, verificare quali terne costituite da tre dei quattro punti sono allineate.

Soluzioni.

Ci sono Quattro possibili terne

i) $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$.

ii) $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_4$.

iii) $\underline{x}_1, \underline{x}_3, \underline{x}_4$.

iv) $\underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4$.

Si tratta di stabilire una condizione che caretterizzi l'allineamento di tre punti, senza fare uso dell'equazione della retta per due punti.

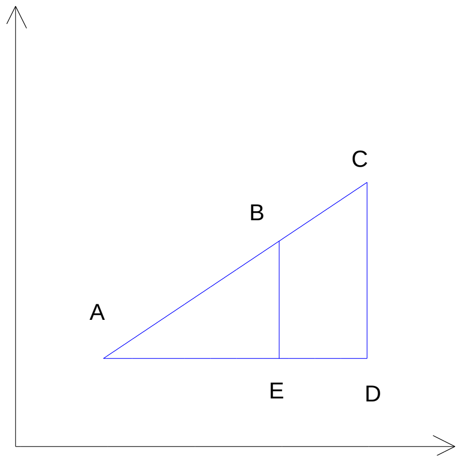


Figura I.7: Punti allineati.

Con riferimento alla figura I.7 di pagina 23 siano A, B, C i tre punti. Da B e Da C tracciamo le parallele all'asse delle y, da A tracciamo la parellela all'asse delle x. Questa interseca le precedenti rispettivamente in E ed in D. I tre punti sono allineati se, e solo se, il poligono ABCDE è un triangolo perché il punto B deve stare sulla congiungente i punti A e B.

Se i tre punti sono allineati, allora i due triangoli $A\overset{\triangle}{B}E$ ed $A\overset{\triangle}{C}D$ sono simili. Allora valgono le seguenti uguaglianze fra rapporti di elementi corrispondenti.

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} .$$

Indicando genericamente con

$$\underline{x}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} ,$$

un generico punto, dati tre punti $\underline{x}_i$, $\underline{x}_j$, $\underline{x}_h$ essi sono allineati se è :

$$\frac{x_i - x_j}{y_i - y_j} = \frac{x_i - x_h}{y_i - y_h} .$$

Questa condizione vale se i denominatori non sono nulli. Se un denominatore è nullo, significa che i due punti hanno la stessa ordinata. Quindi tre punti sono allineati se ambedue i denominatori sono nulli. Se un denominatore è nullo ed l'altro non è nullo il terzo punto non è allineato con i primi due per ché tutti i punti allineti con i primi due devono avere la stessa ordinata dei primi due.

Esaminiamo la casistica: le terne possibili sono 4 e precisamente

i) $(\underline{x}_1; \underline{x}_2; \underline{x}_3)$.

ii) $(\underline{x}_1; \underline{x}_2; \underline{x}_4)$.

iii) $(\underline{x}_1; \underline{x}_3; \underline{x}_4)$.

vi) $(\underline{x}_2; \underline{x}_3; \underline{x}_4)$.

Nel caso i), i rapporti valgono:

$$\frac{2-0}{0-1} = -2 \quad , \quad \frac{2-1}{0-1} = -1 .$$

I tre punti non sono allineati.

Nel caso ii), i rapporti valgono:

$$\frac{2-0}{0-1} = -2 \quad , \quad \frac{2-4}{0+1} = -2 .$$

I tre punti sono allineati.

Nel caso iii), i rapporti valgono:

$$\frac{2-1}{0-1} \;=\; -1 \quad , \quad \frac{1-4}{1+1} \;=\; -\frac{3}{2}\,.$$

I tre punti non sono allineati.

Nel caso iv), i rapporti valgono:

$$\frac{0-1}{1-1} \;=?\quad , \quad \frac{0-4}{1+1} \;=\; 2\,.$$

I tre punti non sono allineati perché, nel primo rapporto si annulla il denominatore, mentre nel secondo rapporto non si annulla.

Esercizio I.3.3

Dati i punti $A \equiv \binom{2}{2}$, $B \equiv \binom{2}{-1}$, $C \equiv \binom{0}{2}$, tra le rette passanti per $P \equiv \binom{1}{1}$, caratterizzare, mediante una condizione sui coefficienti angolari, quelle che intersecano

i) il segmento $\overline{AB}$,

ii) il segmento $\overline{AC}$.

i) Con riferimento alla figura I.8 di pagina 26, basta tracciare le rette per P e A e quella per P e B. Il fascio di rette che passano per P, eclusa quella verticale, ha equazione

$$y-1 \;=\; m(x-1)\,.$$

Imponendo il passaggio per il punto A si ottiene che deve essere

$$2-1 \;=\; m(2-1) \;\;\Longrightarrow\;\; m \;=\; 1\,.$$

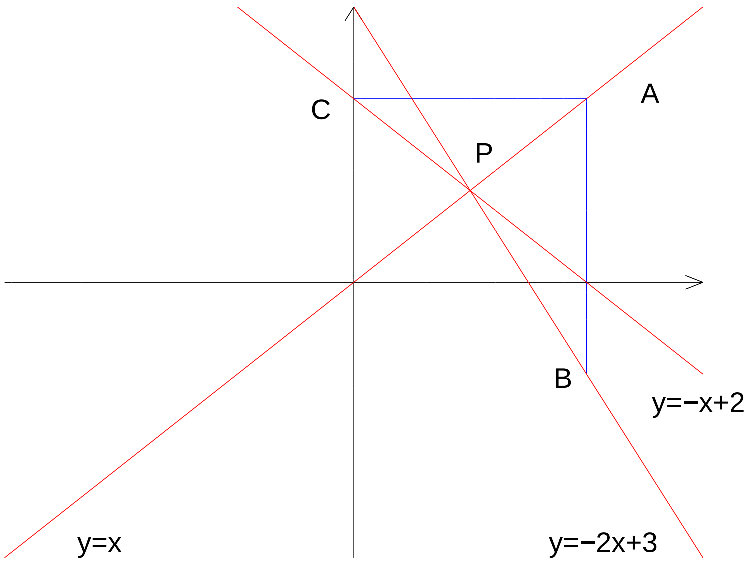


Figura I.8: Esercizio I3.3.

La retta che passa per i punti P ed A ha equazione $y - 1 = x - 1$, cioè $y = x$. Imponendo il passaggio per il punto B si ottiene che deve essere

$$-1 - 1 \;=\; m(2 - 1) \quad\Longrightarrow\quad m \;=\; -2\,.$$

La retta che passa per i punti P ed B ha equazione $y - 1 = -2(x - 1)$, cioè $y = -2x + 3$. Quindi le rette per P che intersecano il segmento $\overline{AB}$ sono quelle che hanno coefficiente angolare $-1 \le m \le 1$.

ii) Con riferimento alla figura I.8 di pagina 26, basta tracciare le rette per P e A e quella per P e C. Il fascio di rette che passano per P, eclusa quella verticale, ha equazione

$$y - 1 \;=\; m(x - 1)\,.$$

L'equazione della retta per i punti P ed A è quella già trovata nel caso precedente. Imponendo il passaggio per il punto C si ottiene che deve essere

$$+2 - 1 \;=\; m(0-1) \;\Longrightarrow\; m \;=\; -1\,.$$

La retta che passa pr i punti P ed C ha equazione $y-1=-(x-1)$, cioè $y=-x+2$.

Lo studente frettoloso e disattento scriverà che le rette per P che intersecano il segmento $\overline{AC}$ sono quelle che hanno coefficiente angolare $1 \le m \le -1$.

Filosoficamente la risposta sarebbe anche corretta ma la scrittura è sbagliata perché implica che sia $1 \le -1$! La scrittura corretta è che le rette per P che intersecano il segmento $\overline{AC}$ sono quelle che hanno coefficiente angolare $m \ge 1$ oppure $m \le -1$. C'è anche la retta di equazione $x=1$ che non ha coefficiente angolare.

Esercizio I.3.4

i) Si verifichi che, se l'equazione di una retta è espressa nella forma $ax+by+c=0$, allora le rette ad essa parallele sono tutte e solo quelle la cui euazione può essere scritta nella forma $a'x+b'y+c'=0$ con

$$\frac{a}{a'} \;=\; \frac{b}{b'}\,,$$

inoltre le due equazioni rappresentano la stessa retta se, e solo se, è

$$\frac{a}{a'} \;=\; \frac{b}{b'} \;=\; \frac{c}{c'}\,.$$

Soluzione.

Se è $a=0$, la retta è orizzontale, quindi deve essere anche $a'=0$. Se è $b=0$, la retta è verticale, quindi deve essere anche $b'=0$.

Mettiamoci, ora, nel caso $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Quindi è anche $a' \neq 0$ e $b' \neq 0$. Possiamo scrivere le due equazioni nella forma

$$y \;=\; -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad , \quad y \;=\; -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'} \;.$$

il risultato deriva dal fatto che due rette la cui equazione è espressa come sopre sono parallele soltanto se hanno lo stesso coefficiente angolare e sono coincidenti soltanto se, oltre ad avere lo stesso coefficiente angolare hanno lo stesso termine noto. Per il parallelismo deve essere

$$\frac{a}{b} \;=\; \frac{a'}{b'} \iff \frac{a}{a'} \;=\; \frac{b}{b'} \;.$$

Per la coincidenza deve essere anche

$$\frac{c}{b} \;=\; \frac{c'}{b'} \iff \frac{c}{c'} \;=\; \frac{b}{b'} \;=\; \frac{a}{a'} \;.$$

ii) Si verifichi che, se l'equazione di una retta è espressa nella forma $ax + by + c = 0$, allora le rette ad essa perpendicolari sono tutte e solo quelle la cui euazione può essere scritta nella forma $a'x + b'y + c' = 0$ con

$$a \cdot a' + b \cdot b' \;=\; 0 \,,$$

quindi nella forma $bx - ay + c' = 0$.

Soluzione.

Se le equazioni delle rette sono espresse nella forma $y = mx + n$ ed $y = m'x + n'$, la condizione di perpendicolarità si esprime come

$$mm' + 1 = 0 .$$

Usando la relazione fra i coefficienti a e b ed il coefficientr angolare m, la condizione di perpendicolarità si scrive come

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a'}{b'}\right) + 1 = 0 \iff a \cdot a' + b \cdot b' = 0 .$$

Esercizio I.3.5

Date le rette di equazione

i) $3x + 2y - 3 = 0$,

ii) $2x - 3y + 4 = 0$,

iii) $2x - y + 2 = 0$,

iv) $3x + 2y + 5 = 0$,

individuare le coppie di rette parallele e perpendicolari. Determinare le coordinate dei punti di intersezione delle varie coppie di rette.

Soluzioni.

In base all'esercizio precedente, Le rette di equazione $i)$ e $iv)$ sono parallele non coincidenti perché il rapporto $\frac{a}{a'}$ vale 1, il rapporto $\frac{b}{b'}$ vale 1 ed il rapporto $\frac{c}{c'}$ vale $-\frac{3}{4}/not = 1$. La retta di equazione $ii)$ è perpendicolare alle due precedenti perché è $a \cdot a' + b \cdot b' + 1 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 1 = 0$. La retta di equazione *iii*) non è parallela e non è perpendicolare ad alcuna delle altre tre perché non soddisfa le precedenti condizioni. Le possibili coppie di rette sono 6. La retta di equazione *i*) e quella di equazione *iv*) non hanno intersezione i quanto parallele.

Riassumiamo l'analisi delle 6 possibili coppie.

i)-*ii*)

Rette perpendicolari. L'intersezione si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \,, \\ 2x - 3y + 4 = 0 \,. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per 3 e la seconda equazione per 2 e sottraendo membro a membro otteniamo che è

$$\begin{cases} 6x + 4y = 6 \,, \\ 6x - 9y = -12 \,, \end{cases} \implies \begin{cases} y = \dfrac{18}{13} \,, \\[2ex] x = \dfrac{1}{13} \,. \end{cases}$$

i)-*iii*)

Rette non parallele e non perpendicolari. Risolviamo il sistema per ottenere le coordinate del punto di intersezione.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \,, \\ 2x - y + 2 = 0 \,. \end{cases}$$

Moltiplichiamo la seconda equazione per 2 e sommiamo membro a membro.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \,, \\ 4x - 2y = -4 \,, \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\dfrac{1}{7} \,, \\[2ex] y = \dfrac{12}{7} \,. \end{cases}$$

i)-iv)

Si tratta di due rette parallele non coincidenti. Non ci sono punti di intersezione.

ii)-iii)

Le rette non sono parallele e non sono perpendicolari. Troviamo l'intersezione.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \,, \\ 2x - y = -2 \,, \end{cases}$$

Sottraiamo membro a membro ed otteniamo che è

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \,, \\[2ex] y = 1 \,. \end{cases}$$

ii)-iv)

Le rette sono perpendicolari. Troviamo l'intersezione.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \,, \\ 3x + 2y = -5 \,, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = -8 \,, \\ 9x + 6y = -15 \,, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{23}{13} \,, \\[2ex] y = \dfrac{2}{13} \,. \end{cases}$$

iii)-iv)

Le rette non sono parallele e non sono perpendicolari. Calcoliamo l'intersezione.

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \,, \\ 3x + 2y = -5 \,, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -4 \,, \\ 3x + 2y = -5 \,, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{9}{7} \,, \\[2ex] y = -\dfrac{4}{7} \,. \end{cases}$$

Esercizio I.3.6

Individuare quali coppie di punti $P \equiv \binom{x_1}{y_1}$ e $Q \equiv \binom{x_2}{y_2}$ hanno distanza che può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} i) & \overline{PQ} = |x_2 - x_1| \,, \\ ii) & \overline{PQ} = |y_2 - y_1| \,. \end{cases}$$

Soluzione

Ricordando la formula della distanza fra due punti

$$\overline{PQ} \;=\; \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \,,$$

e che è $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, il caso $i)$ si verifica se è $y_1 = y_2$, cio'ec se i due punti hanno la stessa ordinata. Il caso $ii)$ si verifica se è $x_1 = x_2$, cioè se i due punti hanno la stessa ascissa.

Esercizio I.3.7

Esprimere le coordinate del punto medio del segmento PQ in funzione delle coordinate di P e di Q.

Soluzione

Sia $P \equiv \binom{x_1}{y_1}$ e $Q \equiv \binom{x_2}{y_2}$.

Con riferimento alla figura I.9 di pagina 33, sia M il punto medio del segmento PQ. Per il teorema di Talete la sua proiezione sul cateto PK è il suopunto A medio e la proiezione sull'altro cateto QK è il suo punto medio. L'ascissa di A vale

$$x_A \;=\; \frac{x_1 + x_2}{2} \,,$$

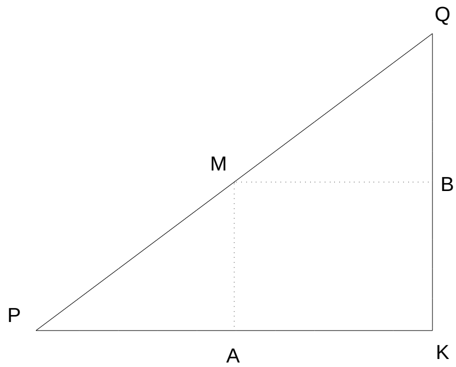


Figura I.9: Punto medio.

l'ordinata di B vale

$$y_B = \frac{y_1 + y_2}{2} .$$

Le coordinate di M sono $\binom{x_A}{y_B}$.

Esercizio I.3.8

Dato il triangolo di vertici $A \equiv \binom{1}{1}$, $B \equiv \binom{2}{3}$, $C \equiv \binom{4}{2}$,

i) calcolarne il perimetro;

ii) scrivere le equazioni delle rette che contengono i lati;

iii) verificare che è rettangolo;

iv) scrivere le equazioni delle mediane e verificare che il baricentro le divide in due segmenti che stanno nel rapporo 2 : 1.

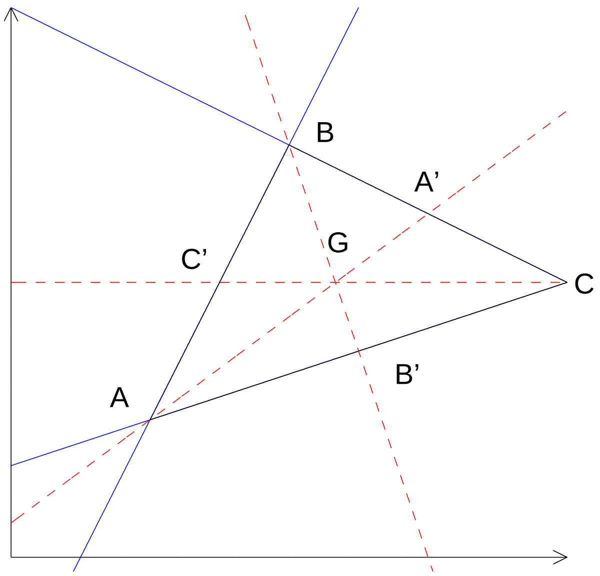


Figura I.10: Punto medio.

Soluzioni

Con riferimento alla figura I.10 di pagina 34, sia G il baricentro, incontro delle mediane. sia A' il punto medio di BC, B' il punto medio di AC e C' il punto medio di AB.

i)

Occorre calcolare le lunghezze dei tre lati.

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}\,.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}\,.$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}\,.$$

Il perimetro vale $p = \overline{AB} + \overline{ACBC} = 2\sqrt{5} + \sqrt{10}$.

ii)

Ricordando la formula dell'equazione di una retta passante per due punti assegnati,

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,,$$

l'equazione della retta per A e per B è

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-1}{2-1} \implies 2x-y-1=0\,.$$

L'equazione della retta per A e per C è

$$\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-1}{4-1} \implies x-3y-1=0\,.$$

L'equazione della retta per B e per C è

$$\frac{y-3}{2-3} = \frac{x-2}{4-2} \implies x+2y-8=0\,.$$

iii)

Si vede che le equazioni della retta per AB e quella della retta per BC sono perpendicolari perché la prima ha coefficienti $(a,b)=(2,-1)$, la seconda ha coefficienti $(a',b')=(1,2)$ ed è

$$a\cdot a' + b\cdot b' \;=\; 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \;=\; 0\,.$$

Il triangolo è, quindi, rettangolo in B.

iv)

Per calcolare le equazioni delle mediane, calcoliamo le coordinate dei punti medi ddei tre lati. È

$$A' = \begin{pmatrix} \dfrac{2+4}{2} \\ \\ \dfrac{3+2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \\ \dfrac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

$$B' = \begin{pmatrix} \dfrac{1+4}{2} \\ \\ \dfrac{1+2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} \\ \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$C' = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2}{2} \\ \\ \dfrac{1+3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La mediana per AA' ha equazione

$$\frac{y-1}{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}} = \frac{x-1}{3-1} \implies 3x-4y-2 = 0\,.$$

La mediana per BB' ha equazione

$$\frac{y-3}{\frac{3}{2}-3} = \frac{x-2}{\frac{5}{2}-2} \implies 3x+y-9 = 0\,.$$

C e C' hanno la stessa ordinata, 2, quindi l'equazione della retta che passa per essi è

$$y = 2\,.$$

Le coordinate del baricentro G si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x - 4y + 1 \;=\; 0\,, \\ 3x + y - 9 \;=\; 0\,, \\ y \;=\; 2\,. \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni in due incognite. Esso potrebbe non avere soluzioni. Il fatto che invece ha una unica soluzione discende dal fatto generale che in ogni triagolo le tre mediane si intersecano in un unico punto detto baricentro.

Sostituendo $y=2$ nelle prime due equazioni, otteniamo in entrambi i casi la soluzione $x=\frac{7}{3}$. Le coordinate di G sono

$$\underline{x}_G \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{7}{3} \\ \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

Verifichiamo l'ultima questione. È

$$\overline{AG} \;=\; \sqrt{\left(1-\frac{7}{3}\right)^2 + (1-2)^2} \;=\; \sqrt{\frac{16}{9}+1} \;=\; \sqrt{\frac{25}{9}} \;=\; \frac{5}{3}\,;$$

$$\overline{GA'} \;=\; \sqrt{\left(\frac{7}{3}-3\right)^2 + \left(2-\frac{5}{2}\right)^2} \;=\; \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{4}} \;=\; \sqrt{\frac{25}{36}} \;=\; \frac{5}{6}\,;$$

$$\overline{BG} \;=\; \sqrt{\left(2-\frac{7}{3}\right)^2 + (3-2)^2} \;=\; \sqrt{\frac{1}{9}+1} \;=\; \sqrt{\frac{10}{9}} \;=\; \frac{\sqrt{10}}{3}\,;$$

$$\overline{GB'} \;=\; \sqrt{\left(\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2} \;=\; \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{4}} \;=\; \sqrt{\frac{10}{36}} \;=\; \frac{\sqrt{10}}{6}\,;$$

$$\overline{CG} = \left|4 - \frac{7}{3}\right| = \frac{5}{3}\,;$$

$$\overline{GC'} = \left|\frac{7}{3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{6}\,.$$

Si vede che la condizione è soddisfatta, infatti è

$$\overline{GA'} = \frac{1}{2}\overline{AG} \quad , \quad \overline{GB'} = \frac{1}{2}\overline{BG} \quad , \quad \overline{GC'} = \frac{1}{2}\overline{CG}\,.$$

Esercizio I.3.9

Rappresentare, nel piano cartesiano, gli insiemi di punti che soddisfano le seguenti condizioni.

i) $|x| + |y| = x + y\,;$

ii) $|x| + |y| > x + y\,;$

iii) $x + y + 1 > 1\,;$

iv) $x + |y| + 1 < 0\,;$

v) $\begin{cases} y > x + 2\,, \\ y > -x + 3\,; \end{cases}$

vi) $|y - x| < 1\,.$

Soluzioni

i)

Occorre analizzare il comportamento della uguaglianza quadrante per quadrante.

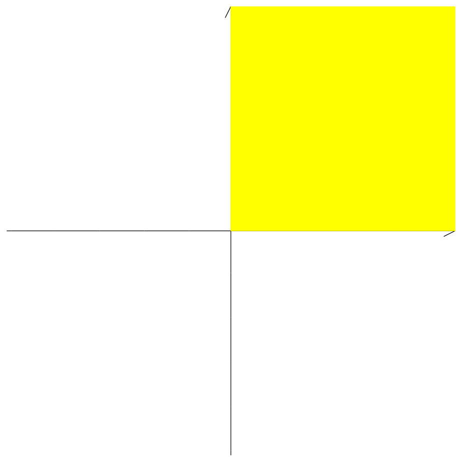


Figura I.11: Esercizio I39i.

Nel quadrante I deve essere $x+y = x+y$, cioè tutti i punti del quadrante I soddisfano l'uguaglianza. Se è $x = 0$ e $y \geq 0$, l 'uguaglianza è soddisfatta. Se è $y = 0$ e $x \geq 0$ l'uguaglianza è soddisfatta. Se è $y = 0$ e $x < 0$ l'uguaglianza non è soddisfatta come nel caso $x = 0$ e $y < 0$.

Se è $x < 0$ e $y < 0$, l'uguaglianza diviene $-x - y = x + y$ e cioè $2(x + y) = 0$ incompatible con la condizione $x < 0$ e $y < 0$.

Se è $x \geq 0$ e $y < 0$, l'uguaglianza diviene $+x - y = x + y$ e cioè $2y = 0$ incompatible con la condizione $y < 0$.

In conclusione la condizione è soddisfatta in tutti i punti del primo quadrante compresi i semiassi coordinati. Vedi figura I.11 di pagina 39.

ii)

Anche in questo caso occorre fare una analisi quadrante per quadrante.

Nel primo quadrante la disuguaglianza diviene $x + y > x + y$, mai soddisfatta. Nel secondo quadrante la disuguaglianza diviene $-x + y >$

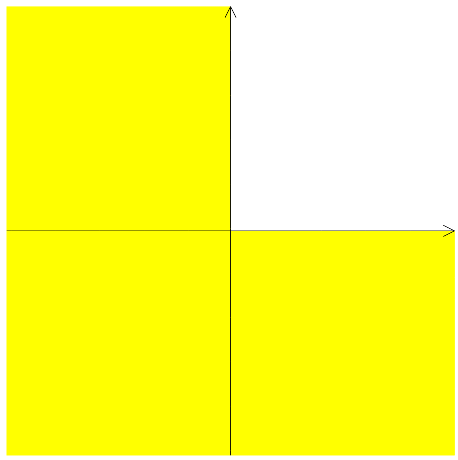


Figura I.12: Esercizio I39ii.

$x + y$, equivalente a $-x > x$, sempre soddisfata. Nel terzo quadrante la disuguaglianza diviene $-x - y > x + y$, equivalente a $x + y < 0$, sempre soddisfata nel quadrante. Nel quarto quadrante la disuguaglianza diviene $x-y > x+y$, equivalente a $-y > y$, sempre soddisfata. Vediamo il comportamento sui semiassi. Se è $x = 0$ e $y \geq 0$, la disuguaglianza diviene $y > y$ non soddisfatta. Se è $x = 0$ e $y < 0$, la disuguaglianza diviene $-y > y$ soddisfatta. Se è $y=0$ e $x \geq 0$, la disuguaglianza diviene $x > x$ non soddisfatta. Se è $y = 0$ e $x < 0$, la disuguaglianza diviene $-x > x$ soddisfatta.

In conclusione la disuguaglianz aè soddisfatta nei quadranti II, III, IV esclusi i semiassi che ne costituiscono la frontiera, cioè il semiasse delle x positive e quello delle y positive. Vedi figura I.12 di pagina 40.

iii)

Si tratta dei punti del piano che soddisfano la condizione $x + y > 0$, cioè $y > -x$. Sono i punti del piano al disopra la retta di equazione $x+y = 0$.

Vedi figura I.13 di pagina 41.

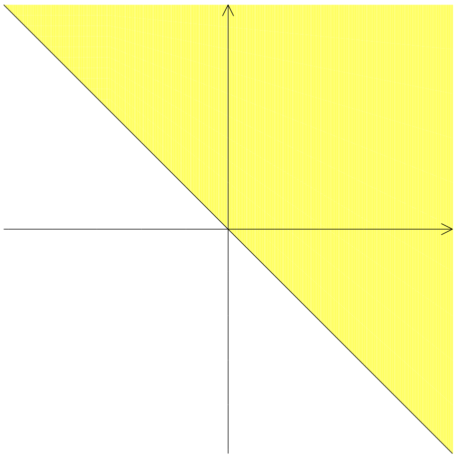


Figura I.13: Esercizio I39iii.

iv)

Si tratta del quadrante di sinistra dei quattro in cui il piano resta diviso dalle due rette di equazione $y = -x - 1$ e $y = x + 1$, escluse le due rette. Vedi figura I.14 di pagina 42.Infatti, se è $y \geq 0$, deve essere $y < -x - 1$. Se è $Y < 0$, deve essere $y > x + 1$.

v)

Si tratta del quadrante superiore dei quattro in cui il piano resta diviso dalle due rette di equazione $y = x + 2$ e $y = -x + 3$, escluse le due rette. Vedi figura I.15 di pagina 42.

vi)

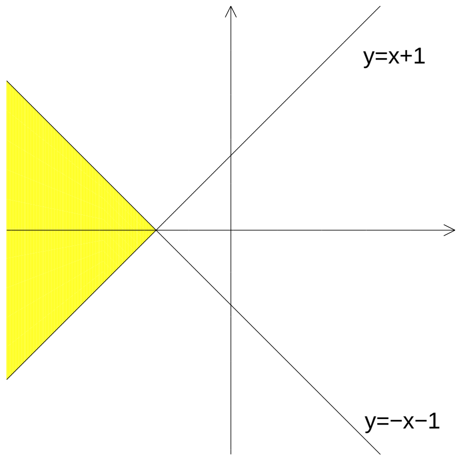


Figura I.14: Esercizio I39iv.

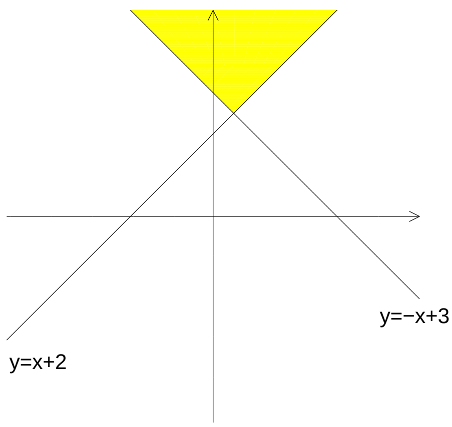


Figura I.15: Esercizio I39v.

Si tratta della striscia di piano compresa fra le rette di equazione $y = x+1$ e $y = x - 1$. Infatti la disuguaglianza è equivalente alle seguenti

$$|y - x| < 1 \iff -1 < y - x < 1 \iff x - 1 < y < x + 1 \,.$$

Vedi figura I.16 di pagina 43.

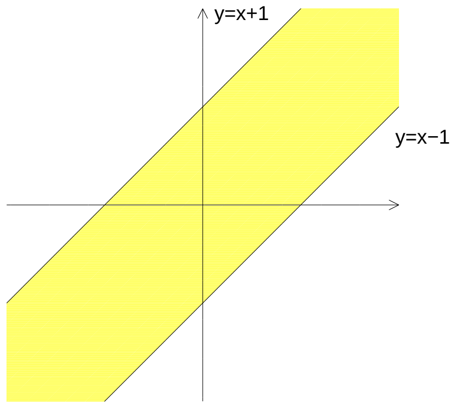


Figura I.16: Esercizio I39vi.

Complemento al testo.

Mostriamo i calcoli per trovare la formula della distanza punto-retta nel piano.

La figura I.17 di pagina 44 è quella che manca nel testo. Se $P \equiv \binom{x_0}{y_0}$ è il punto e si vuole calcolare la sua distanza dalla retta$r$ di equazione $ax + by + c{=}0$, scriviamo l'equazione della retta per P e perpendicolare ad r. Tale equazione è $b(x - x_0) - a(y - y_0){=}0$ che scriviamo nella forma $bx - ay - bx_0 + ay_0{=}0$. La distanza cercata è la distanza di P dal punto H intersezione delle due rette. Calcoliamo le coordinate di H risolvendo

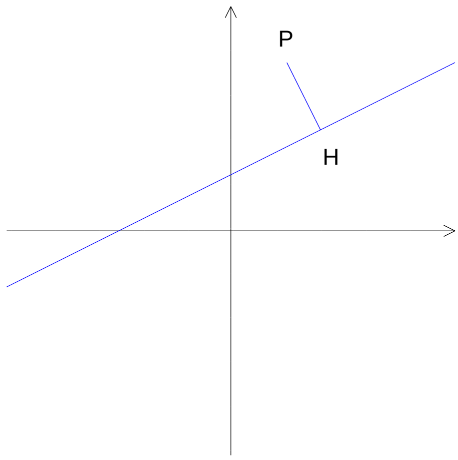


Figura I.17: Distanza punto-retta.

il sistema costituito dalle equazioni delle due rette.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \, , \\ bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0 \, . \end{cases}$$

Moltiplicano la prima equazione per a, la seconda equazione per b e sommando membro a membro, otteniamo che deve essere

$$(a^2 + b^2)x + ac - b^2x_0 + aby_0 \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; x \;=\; \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} \, .$$

Moltiplicano la prima equazione per b, la seconda equazione per a e sottraendo membro a membro, otteniamo che deve essere

$$(a^2 + b^2)y + bc - a^2y_0 + abx_0 \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; y \;=\; \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc}{a^2 + b^2} \, .$$

Calcoliamo le quantità $x - x_0$ e $y - y_0$.

$$x - x_0 \;=\; \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac - a^2x_0 - b^2x_0}{a^2 + b^2} \;=\; -\frac{a}{a^2 + b^2}\Big(ax_0 + by_0 + c\Big) \, .$$

$$y - y_0 \;=\; \frac{a^2y_0 - abx_0 - bc - a^2y_0 - b^2y_0}{a^2+b^2} \;=\; -\frac{b}{a^2+b^2}\Big(ax_0+by_0+c\Big)\,.$$

Allora la distanza cercata vale

$$\overline{PH}^2 \;=\; \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}\Big(ax_0+by_0+c\Big)^2 + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}\Big(ax_0+by_0+c\Big)^2 \;=$$

$$=\; \frac{\Big(ax_0+by_0+c\Big)^2}{a^2+b^2}\,.$$

Da cui la formula della distanza

$$d \;=\; \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

essendo, lo ripetiamo fino alla noia, $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$.

Esercizio I.3.10

Sia dato il punto $P \equiv \binom{1}{2}$ e la retta r di equazione $y=\frac{1}{2}x-1$.

i) Scrivere l'equazione della retta per P perpendicolare a r.

ii) Calcolare la distanza di P da r.

Soluzioni

i)

L'equazione della retta r si scrive $x-2y-2=0$. Allora l'equazione della retta per P e perpendicolare ad r si scrive

$$2(x-1)+(y-2)=0 \iff 2x+y-4=0 \iff y=-2x+4\,.$$

ii)

Applicando l'apposita formula, la distanza cercata vale

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}} .$$

Esercizio I.3.11

Date le rette di equazione $6x + 8y + 1 = 0$ e $4x - 3y = 1 = 0$, individuare il luogo geometrico dei punti equidistanti da sse e verificare che si tratta di una coppia di rette fra loro ortogonali.

Soluzioni

Dalla geometria sintetica il risultato è ovvio. Le rette sono le bisettrici degli angoli individuati dalle due rette. Siccome due angoli adiacenti sono supplementari, la somma della loro metà fa $\frac{\pi}{2}$, quindi le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

Vediamo la lunga soluzione attaverso la geometria analitica. Basta uguagliare la distanza dl punto $P \equiv \binom{x}{y}$ dalle due rette. Deve essere

$$\begin{aligned}
&\frac{|6x+8y+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|4x-3y-1|}{\sqrt{16+9}} \iff \\
&\iff \frac{|6x+8y+1|}{10} = \frac{|4x-3y-1|}{5} \iff \\
&\iff |6x+8y+1| = 2|4x-3y-1| \iff \\
&\iff |6x+8y+1| = |8x-6y-2| .
\end{aligned}$$

L'argomento del primo modulo deve essere uguale oppure opposto all'argomento del secondo modulo. Deve, quindi, essere

$$6x + 8y + 1 = 8x - 6y - 2 \iff 2x - 14y - 3 = 0 ,$$

oppure

$$6x + 8y + 1 \;=\; -8x + 6y + 2 \iff 14x + 2y - 1 \;=\; 0\,.$$

Come si vede si tratta delle equazioni di due rette mutuamente perpendicolari.

Esercizio I.3.12

Tra i punti del piano dati da

$$\begin{cases} x = 1 + t\,, \\ y = 1 + 2t\,, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1\,,$$

individuare quello/i che hanno distanza minima o massima dal punto $P \equiv \binom{2}{1}$.

Soluzione.

Si può procedere per varie vie. I punti dati costituiscono un segmento. Il punto di minima distanza è il piede della perpendicolare dal punto P, se questo appartiene al segmento, in tal caso il punto di massima distanza è un estremo o entrambi. Se il piede della perpendicolare non appartiene al segmento, il punto di minima distanza è un estremo e quello di massima distanza è l'altro estremo.

Usiamo un metodo più rudimentale. Il quadrato della distanza di P da un punto del segmento vale

$$(1 + t - 2)^2 + (1 + 2t - 1)^2 \;=\; t^2 - 2t + 1 + 4t^2 \;=\; 5t^2 - 2t + 1\,.$$

Studiamo la funzione $g(t) = 5t^2 - 2t + 1$ sull'intervallo $[0, 1]$. Si tratta di una parabola con concavità verso l'alto . Se l'ascissa del vertice, t_0, cade in $[0,1]$, l'ordinata del vertice è il valore minimo e, sostituito nella equazione del segmento, fornisce il punto di minima distanza. È

$$t_0 \;=\; -\frac{-2}{2\cdot 5} \;=\; \frac{1}{5}\;.$$

Il punto corrispondent e è

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{5} \\ 1+2\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}\;.$$

Il punto di massima distanza è uno degli estremi. Per $t=0$ la distanza vale 1, per $t=1$ la distanza vale $\sqrt{4}=2$. Il punto di massima distanza è quello dato dal valore 1 del parametro e cioè $\binom{2}{3}$.

Esercizio I.3.13

Due navi A e B hanno posizioni che sono espresse, nell'istante t da

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 5t \end{pmatrix} \quad , \quad B(t) \equiv \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}t \\ 1+4t \end{pmatrix}\;.$$

Descrivere il loro moto. Ci sarà collisione?

Soluzione.

Le equazioni orarie non sono altro che le equazioni parametriche di due rette non parallele, quindi incidenti. Il fatto che le traiettorie si incrocino, non implica che ci sarà collisione. La collisione ci sarà soltanto se le due navi transitano per il punto comune alle due traiettorie nello stesso istante. Imponiamo cche il punto $A(t)$ coincida con il punto $B(t)$.

$$\begin{cases} 0 = 1 - \dfrac{1}{2}t\,, \\[2ex] 5t = 1+4t\;. \end{cases}$$

Si tratta di un sistem di due equazioni in una incognita. La prima equazione fornisce $t = 2$ che non soddisfa la seconda. Quindi il sistema non ha soluzioni e le navi non colideranno.

Esercizio I.3.14

Sotto quali condizioni una equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c \;=\; 0 \,,$$

rappresenta una circonferenza? Quale ne è il centro? Quale ne è il raggio? Cosa rappresenta negli altri casi?

Soluzione.

Confrontiamo con l'equazione canonica della circonferenza di centro $\binom{x_0}{y_0}$ e raggio r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \iff$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0 \,.$$

dovrà essere

$$\begin{cases} a = -2x_0 \,, \\ b = -2y_0 \,, \\ c = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \,. \end{cases}$$

Ricaviamo, formalmente, le coordinate del centro ed il raggio.

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{a}{2} \,, \\ \\ y_0 = -\dfrac{b}{2} \\ \\ r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \,. \end{cases}$$

La condizione affinché l'equazione data sia l'equazione di una circonferenza è il candidato quadrato del raggio sia positivo, cioè

$$c - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} > 0 \iff a^2 + b^2 < 4c\,.$$

Se vale l'uguale, il luogo dei punti del piano che soddisfano l'equazione è costituito soltanto da un punto. Il primo membro della equazione si scompone come $(x - x_0)^2 + (yy_0)^2$.

Se è $a^2 + b^2 > 4c$, non ci sono punti del piano che soddisfano l'equazione.

Esercizio I.3.15

Scrivere le equazioni delle circonferenze:

i) avente come diametro il segmento che gli assi staccano sulla retta di equazione $y = x + 2$.

ii) tangenti agli assi coordinati e passanti per il punto $P \equiv \binom{4}{2}$.

Soluzioni.

i)

Se il segmento è un diametro della circonferenza, allora il punto medio è il centro ed il raggio vale la meta à della lunghezza del segmento. Gli estremi del segmento sono $\underline{x}_1 \equiv \binom{0}{2}$ e $\underline{x}_2 \equiv \binom{-2}{0}$. Il punto medio è $\binom{-1}{1}$, la lunghezza vale $\sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. Quindi il raggio vale $\sqrt{2}$. L'equazione della circonferenza è

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 \;=\; 2 \text{ equivalentemente } x^2 + y^2 + 2x - 2y \;=\; 0\,.$$

ii)

Se la circonferenza è tangente agli assi, il suo centro deve stare sulle bisettrici dei quadranti. Poich'eca dovrà passare per unpunto del primo quadrante, il centro starac sulla bisettrice del primo quadrante, quindi avrà coordinate del tipo $\binom{a}{a}$ con $a > 0$. Inoltre il raggio sarà pari ad a. La distanza del punto $\binom{a}{a}$ dal punto $\binom{4}{2}$ dovrà, quindi, essere pari ad a.

$$\sqrt{(a-4)^2 + (a-2)^2} \;=\; a \iff$$

$$\iff a^2 - 8a + 16 + a^2 - 4a + 4 \;=\; a^2 \iff$$

$$\iff a^2 - 12a + 20 \;=\; 0\,.$$

Le radici sono

$$\begin{cases} a = 2\,, \\ a = 10\,. \end{cases}$$

Per $a = 2$, l'equazione della circonferenza è

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \;=\; 4 \text{ equivalente a } x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 \;=\; 0\,.$$

Per $a = 10$, l'equazione della circonferenza è

$$(x-10)^2 + (y-10)^2 \;=\; 100$$

equivalente a

$$x^2 + y^2 - 20x - 20y + 100 \;=\; 0\,.$$

Esercizio I.3.16

Determinare gli insiemi di punti del pianoindividuati dalle seguenti equazioni.

i) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$,

ii) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 30 = 0$,

iii) $x^2 + y^2 - 4 = 0$,

iv) $2x^2 + 2y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$.

Soluzioni.

Anzichè usare brutalmente le formule, usiamo un metodo più terra-terra. Per ogni variabile prendiamo i termini di secondo e primo grado e li completiamo ad un quadrato perfetto. Per fare ciò occorre aggiungere e togliere il quadrato della metà del coefficiente del termine di primo grado.

i)

Procediamo come annunciato.

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 9 - 9 = 0 \iff$$

$$\iff (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25 .$$

Si tratta di una circonferenza di centro il punto $\binom{4}{-3}$ e raggior $r =$.

ii)

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 6y + 9 - 9 + 30 = 0 \iff$$

$$\iff (x-4)^2 + (y+3)^2 = -5 .$$

L'insieme è vuoto. Nessun punto del piano soddisfa l'equazione.

iii)

Si tratta, evidentemente, della circonferenza con centro l'origine e raggio $r = 2$.

iv)

Prima dividiamo ambo i membri per 2 in modo da ricondurci alla forma canonica, poi innestiamo la procedura precedente.

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + y - \frac{1}{2} = 0 \iff$$

$$\iff x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0 \iff$$

$$\iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{16}\,.$$

Si tratta della circonferenza con centro in

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e raggio } r = \sqrt{\frac{21}{16}}\,.$$

Esercizio I.3.17

Determinare le tangenti alla crconferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Soluzione.

La bisettrice del secondo e quarto quadrante ha equazione $x + y = 0$. Le rette ad essa parallele hanno equazione $x + y + c = 0$. Quelle tangenti alla circonferenza avranno distanza dal centro pari al raggio. Le coordinate del centro sono $\binom{3}{2}$, il quadrato del raggio, in base alla formula dell'esercizio I3.14, vale $r^2 = 9 + 4 - 9 = 4$, il raggio è $r = 2$. Imponiamo che la distanza del punto $\binom{3}{2}$ da una retta del fascio di rette parallele valga 2.

$$\frac{|3+2+c|}{\sqrt{2}} = 2 \iff (5+c)^2 = 8 \iff c^2 + 10c + 17 = 0\,.$$

Le radici sono $-5 \pm 2\sqrt{2}$. Le rette tangenti hanno equazione

$$x + y - 5 - 2\sqrt{2} = 0 \text{ e } x + y - 5 + 2\sqrt{2} = 0\,.$$

Esercizio I.3.18

Per un fuoco dell'ellisse, di equazione

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{15} = 1\,,$$

condurre La perpendicolare all'asse maggiore. Determinare la distanza fra i fuochi e i punti in cui detta perpendicolare incontra l'ellissa.

Soluzione.

L'equazione della ellisse è in forma canonica con $a^2 > b^2$, quindi l'asse maggiore sta sull'asse delle x ed i fuochi stanno sull'asse delle x. La figura I.18 di pagina 55 mostra la situazione.

Se $\pm c$ sono le ascisse dei fuochi, il testo fornisce la formula $c^2 = a^2 - b^2$.

$$c^2 = 25 - 15 = 10 \implies c = \pm\sqrt{10}\,.$$

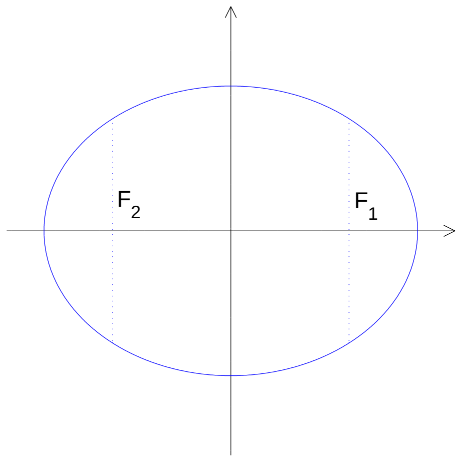


Figura I.18: Ellisse e retta.

La distanza fra i fuochi, d, vale $2c$, quindi è $d = 2\sqrt{10}$. Per trovare le ordinate dei punti cercati, basta sostiuire le ascisse dei fuochi alla x nella equazione della ellisse e ricavare la y.

$$\frac{10}{25} + \frac{y^2}{15} = 1 \implies y^2 = \frac{225}{25} = 9 \, .$$

I quattro punti hanno coordinate

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{10} \\ \pm 3 \end{pmatrix} .$$

Esercizio I.3.19

Determinare i valori del parametro c per cui la retta di equazione

$$y = \frac{5}{2}x + c \, ,$$

e l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1 ,$$

i) si intersecano;

ii) sono tangenti;

iii) non si intersecano.

Soluzioni.

La figura I.19 di pagina 56 mostra l'iperbole e le due rette tangenti.

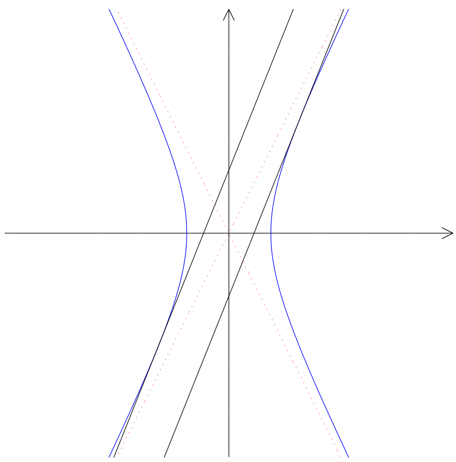


Figura I.19: Iperbole e rette tangenti.

Il metodo più terra-terra per risolvere il problema è di sostituire la y dell'equazione della retta al posto della y nella equazione dell'iperbole. Si ottiene una equazione di secondo grado i cui coefficienti dipendono da c. I valori di c per cui il discriminante, Δ, è positivo, sono quelli per cui la retta interseca l'iperbole. Quelli per cui è $\Delta = 0$, sono quelli per cui la retta è tangente. Quelli per cui è $\Delta < 0$, sono quelli per cui la retta non interseca l'iperbole. Facciamo i calcoli.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{1}{36}\left(\frac{5}{2}x + c\right) \;=\; 1 \iff$$

$$\iff 36x^2 - \frac{9}{4}(25x^2 + 4c^2 + 20cx) \;=\; 9 \cdot 36 \iff$$

$$\iff 4 \cdot 36x^2 - 9 \cdot 25x^2 - 36c^2 - 180cx - 36^2 \;=\; 0 \iff$$

$$\iff 81x^2 + 180cx + 36(c^2 + 36) \;=\; 0 \iff$$

$$\iff 9x^2 + 20cx + 4(c^2 + 36) \;=\; 0\,.$$

Il discriminante della formula ridotta vale

$$\frac{\Delta}{4} \;=\; 100c^2 - 36c^2 - 36^2 \;=\; 64c^2 - 36^2\,.$$

Questo discriminante vale 0 per

$$c^2 \;=\; \frac{36^2}{64} \;=\; \frac{81}{4} \;\Longrightarrow\; c \;=\; \pm\frac{9}{2}\,.$$

Per questi due valori di c otteniamo le rette tangenti che hanno, quindi, equazione

$$y \;=\; \frac{5}{2}x \pm \frac{9}{2}\,.$$

Il discriminante è positivo all'interno dell'intervallo delle radici. Nella figura I.19 di pagina 56 le rette corrispondenti stanno nella striscia di piano delimitata dalle due rette tangenti tracciate.

Per $c > \frac{9}{2}$ e per $c < -\frac{9}{2}$, la retta corrispondente non interseca l'iperbole.

Esercizio I.3.20

Scrivere l'equazione della parabola luogo dei punti equidistanti dal punto $F \equiv \binom{\frac{c}{2}}{0}$ e dalla retta di equazione $x = -\frac{c}{2}$.

Soluzione.

Ricordiamo che il punto ela retta da cui i punti della parabola sono equidistanti prendono il nome rispettivamente di "fuoco' e di "generatrice". In base alle formule della distanza fra due punti e della distanza punto-retta, deve essere

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{(x + \frac{c}{2}^2}{\sqrt{1+0}} \iff$$

$$\iff x^2 + \frac{c^2}{4} - cx + y^2 = x^2 + \frac{c^2}{4} + cx \iff$$

$$\iff x = \frac{1}{2c} y^2$$

Si tratta della stessa equazione canonica che si trova nel testo, ma ad assi scambiati. L'asse di questa parabola è l'asse delle x.

Esercizio I.3.21

Deteminare fuoco e generatrice delle seguenti parabole.

i) $y = 2x^2$,

ii) $y = x^2$,

iii) $y = \frac{1}{2} y^2$.

Soluzioni.

Dalla formula canonica, se una parabola ha equazione $y = ax^2$, allora è $a = \frac{1}{2q}$, quindi è $q = \frac{1}{2a}$. Il fuoco ha coordinate $F \equiv \binom{0}{\frac{q}{2}}$ e la generatrice ha equazione $y = -\frac{q}{2}$. Ricordiamo, inoltre che, in questa forma, l'origine prende il nome di vertice della parabola. Il vertice di una parabola è il punto medio del sengmento che ha come estremi il fuoco d i lpiede della perpendicolare dal fuoco alla generatrice.

i)

È $q = \frac{1}{4}$, quindi il fuoco ha coordinate $\binom{0}{\frac{1}{8}}$ e la generatrice ha equazione $y = -\frac{1}{8}$.

ii)

È $q = \frac{1}{2}$, quindi il fuoco ha coordinate $\binom{0}{\frac{1}{4}}$ e la generatrice ha equazione $y = -\frac{1}{4}$.

iii)

È $q = 1$, quindi il fuoco ha coordinate $\binom{0}{\frac{1}{2}}$ e la generatrice ha equazione $y = -\frac{1}{2}$.

Esercizio I.3.22

Rapresentare graficamente le parabole di equazione

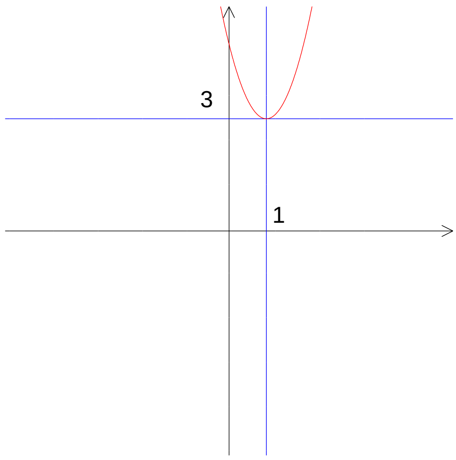
i) $y - 3 = 2(x - 1)^2$;

ii) $y - 1 = -3(x + 2)$.

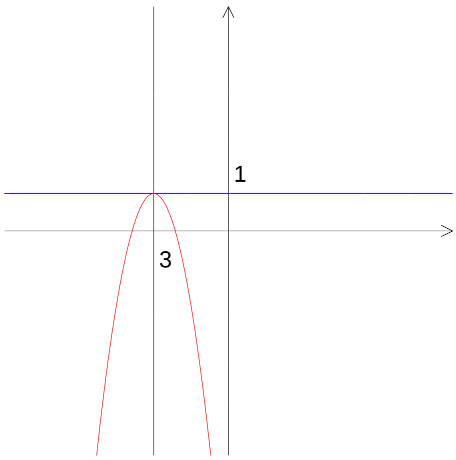
Soluzioni.

Si tratta di parabole in cui il vertice non sta nell'origine. La forma generale è $y - c = a(x - b)^2$. Si tracciano le rette di equazione $y = c$ e

$x = b$. Si prendono queste rette come nuovi assi cartesiani. In questo nuovo riferimento l'equazione diventa l'equazione canonica $y = ax^2$. Le parabole sono rappresentate nelle successive figure.



$y - 3 = 2(x-1)^2$.



$y - 1 = -3(x+2)^2$.

Esercizi di riepilogo.

Esercizio I.3.23

Determinare l'equazione della retta, r, passante per il punto $\underline{x}_0 \equiv \binom{2}{1}$ e parallela alla retta, s, di equazione $y = 3x + 9$.

Soluzione.

La retta deve avere coefficiente angolare $m = 3$. Usando l'equazione del fascio di rette passanti er un punto, otteniamo che deve essere

$$(y-1) = 3(x-2) \iff y = 3x - 5\,.$$

Esercizio I.3.24

Determinare l'equazione della retta, r, passante per il punto $\underline{x}_0 \equiv \binom{2}{1}$ e perpendicolare alla retta, s, di equazione $y=3x+3$.

Soluzione.

La retta deve avere coefficiente angolare $m=-\frac{1}{2}$. Usando l'equazione del fascio di rette passanti er un punto, otteniamo che deve essere

$$(y-1) \;=\; -\frac{1}{2}(x-2) \;\Longleftrightarrow\; y \;=\; -\frac{1}{2}x+2\,.$$

Esercizio I.3.25

Calcolare La distanza tra la retta, r, di equazione $y = 2x$ ed il punto $\underline{x}_0 \equiv \binom{2}{2}$.

Soluzione.

L'equazione della retta si scrive $2x - y \;=\; 0$. Applicando la formula della distanza punto-retta, otteniamo che è

$$d \;=\; \frac{|4-2|}{\sqrt{4+1}} \;=\; \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Esercizio I.3.26

Calcolare la distanza tra la retta di equazione $y = x + 3$ e la retta di equazione $y=x$.

Soluzione.

Si tratta di due rette parallele. In generale, per determinare la distanza tra due rette parallele, basta prendere un qualsiasi punto di una delle due rette e calcolarne la distanza dall'altra. Nel caso di questo esercizio le rette sono inclinate a $\frac{\pi}{4}$ radianti. Vedi figura I.20 di pagina 62.

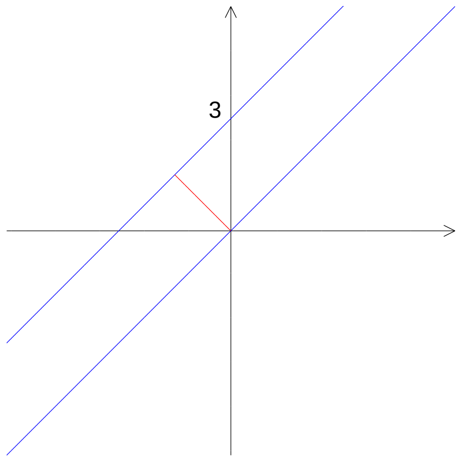


Figura I.20: Esercizio I3.26.

La distanza è la lunghezza del segmento che dall'origine arriva alla retta di equazione $y = x + 3$. Tale segmento è il lato di un quadrato la cui diagonale vale 3, quindi la sua lunghezza vale

$$d = \frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

Esercizio I.3.27

Determinare per quali valori del parametro reale β le rette di equazione $y{=}2x$ e $3x + \beta y + 3{=}0$ sono tra loro perpendicolari.

Soluzione.

L'equazione della prima retta può essere scritta come $2x - y = 0$. La condizione di perpendicolarità fra le due rette fornisce

$$2 \cdot 3 - 1 \cdot \beta = 0 \iff \beta = 6\,.$$

Esercizio I.3.28

Determinare per quali valori del parametro reale γ le rette di equazione $y=2x$ e $3x+\gamma y+7=0$ sono tra loro parallele.

Soluzione.

L'equazione della prima retta può essere scritta come $2x-y=0$. La condizione di parallelismo fra le due rette fornisce

$$\frac{3}{2} = \frac{\gamma}{-1} \iff \gamma = -\frac{3}{2}\,.$$

Esercizio I.3.29

Dati i punti $O \equiv \binom{0}{0}$ e $R \equiv \binom{0}{2}$, determinare l'equazione del luogo dei punti P tali che $d(P,O)=2\cdot d(P,R)$.

Soluzione.

Sia $P \equiv \binom{x}{y}$, basta imporre che sia $\overline{PO}^2=4\overline{PR}^2$.

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 4(x^2+y^2-4y+4) \iff \\ \iff 3x^2+3y^2-16y+16 &= 0 \iff \\ \iff x^2+y^2-\frac{16}{3}y+\frac{16}{3} &= 0\,. \end{aligned}$$

Si tratta della equazione di una circonferenza con centro in

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{16}{6} \end{pmatrix},$$

e raggio, r, tale che è

$$r^2 = \left(\frac{16}{6}\right)^2 - \frac{16}{3} = \frac{64}{36} \implies r = \frac{4}{3}\,.$$

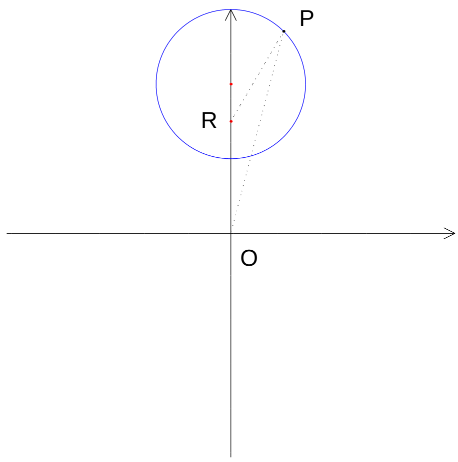


Figura I.21: Esercizio I3.29.

La situazione è mostrata nella figura I.21 di pagina 64.

Esercizio I.3.30

Determinare le equazioni delle circonferenze di raggio $r = 6$, avente il centro sulla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$ e tangenti alla retta di equazione $y=0$.

Soluzione.

Il centro della circonferenza deve stare sulla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$, quindi deve avere coordinate $\binom{x}{\frac{x}{2}}$. Inoltre la circonferenza deve essere tangente all'asse delle x, quindi il modulo dell'ordinata del centro deve essere pari al raggio. Deve essere

$$\left|\frac{x}{2}\right| = 6 \implies x = \pm 12 \,.$$

Le equazioni delle circonferenze, rapprresentate nella figura I.22 di pagina

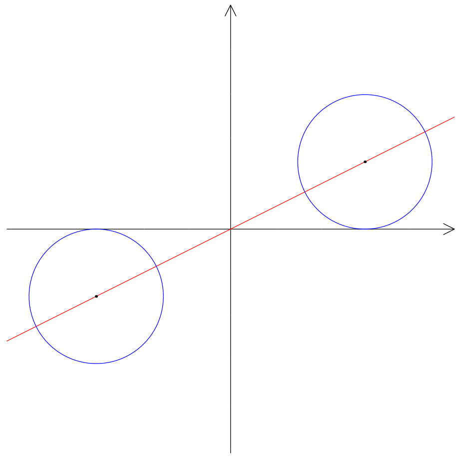


Figura I.22: Esercizio I3.30.

65, sono

$$(x \pm 12)^2 + (y \pm 6)^2 \; = \; 36 \;\; \Longrightarrow \;\; x^2 + y^2 \pm 24x \pm 12y + 144 \; = \; 0 \, .$$

Esercizio I.3.31

Determinare l'equazione della retta passante per i punti di intersezione delle due circonferenze di equazione $x^2+y^2 = 25$ e $(x-4)^2+(y-4)^2 = 1$.

Soluzione.

Diamo prima una soluzione sintetica. Se sottriamo membro a membro le equazioni di due circonferenze espresse in forma canonica, otteniamo una equazione di primo grado che è l'equazione di una retta, che prende il nom di asse radicale delle due circonferenze. Se le due circonferenze si intersecano, le coordinate dei punti di intersezione annullano ambedue le equazioni e quindi tali punti stanno sulla retta. Siccome per due punti passa una sola retta, la retta trovata è quella che passa per i due punti di intersezione. Se le due circonferenze non si intersecano l'asse radicale ha un altro significato geometrico che non è il caso di approfondire.

Scriviamo le due equazioni.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 \;=\; 0\,, \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y + 31 \;=\; 0\,. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo che deve essere

$$8x + 8y - 56 \;=\; 0 \iff x + y - 7 \;=\; 0\,.$$

Questa è l'equazione della retta cercata. Se vogliamo seguire la strada terra-terra di calcolare le coordinate dei punti di intersezione e poi scrivere l'equazione della retta che passa per essi, dobbiamo risolvere il sistema costituito dalle equazioni delle due circonferenze.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 \;=\; 0\,, \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y + 31 \;=\; 0\,. \end{cases}$$

Se ricaviamo la y dalla prima equazione e la sostituiamo nella seconda, ci imbarchiamo nella difficile analisi di una equazione irrazionale. Per risolvere più facilmente il sistema, sottriamo le equazioni membro a membro ed otteniamo l'equazione

$$x + y - 7 \;=\; 0\,.$$

Ricaviamo La y in funzione di x: $y = 7 - x$. Il vantaggio è che, questa volta, y è una funzione di primo grado della x, anzichè una funzione irrazionale. Sostituendo nella prima equazione, otteniamo che deve essere

$$x^2 + (7 - x)^2 - 25 \;=\; 0 \iff x^2 - 7x + 12 \;=\; 0\,.$$

Le soluzione sono $x=4$ e $x=3$. Le coordinate dei due punti di intersezione sono

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ e } \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

L'equazione della retta che passa per essi è

$$\frac{y-3}{4-3} = \frac{x-4}{3-4} \iff$$

$$\iff y-3 = -x+4 \iff x+y-7 = 0\,.$$

Esercizio I.3.32

Data la parabola di equazione $y = /mezzo x^2$, determinare i valori del parametro reale c per cui la retta di equazione $y=2x+c$

i) non interseca la parabola;

ii) è tangente alla parabola;

iii) interseca la parabola in due punti distinti

Soluzione.

Si procede come nel caso della iperbole.

Facciamo sistema fra l'equazione della parabola e l'equazione della retta, ricaviamo la y dalla equazione della retta e la sostituiamo nella equazione della parabola.

$$\begin{cases} y = 2x + c\,, \\ y = \dfrac{1}{2}x^2\,. \end{cases}$$

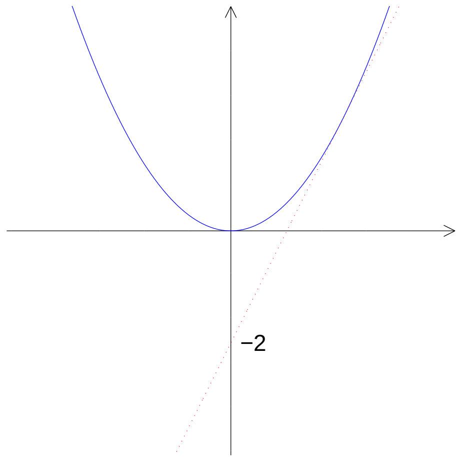


Figura I.23: Esercizio I3.32.

Otteniamo che deve essere

$$2x + c \;=\; \frac{1}{2}x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 4x - 2c \;=\; 0\,.$$

Calcoliamo il discriminante ridotto della equazione di secondo grado e vediamo quando è negativo, quando è nullo, quando è positivo.

$$\Delta ug4 + 2c \;=\; 2(2 + c)\,.$$

I) Se è $c < -2$, non ci sono soluzioni, quindi non ci sono intersezioni.

ii) Se è $c{=}{-2}$ ci sonodue radici coincidenti, quindi la retta è tangente.

iii) Se è $c > -2$, ci sono due soluzioni reali e distinte, quindi ci sono due intersezioni distinte.

La figura I.23 di pagina 68 mostra il caso della retta tangente.

I.4 Funzioni

Esercizio I.4.1

Quali delle seguenti espressioni algebriche definiscono una funzione di $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Questo esercizio necessita alcune spiegazioni. A questo livello di studio, non si può approfondire troppo il concetto di funzione. La definizione data nel testo è molto empirica, ma sufficiente per gli scopi del corso. La confusione nasce nel come dare la legge di cui parla la definizione. Questo esercizio da un metodo che potrebbe essere reso rigoroso. Con una qualche espressione algebrica, si individua un insieme del piano. Queso insieme definisce una funzione se pu'oc essere letto come grafico di una funzione. Questo vuol dire che, se indichiamo con Γ l'insieme, allora per ogni x esiste al più un solo y tale che $\binom{x}{y} \in \Gamma$. L'esercizio può essere riformulato come segue.

"Per quali delle seguenti espressioni algebriche è vero che, per ogni x esiste al più un y per cui l'uguaglianza è vera."

i) $y = x$;

ii) $y = x^2$;

iii) $y^2 = x$;

iv) $y = \frac{1}{x}$;

v) $y = \sqrt{x}$;

vi) $y = x^3$;

vii) $y^3 = x$;

viii) $y = |x|$;

ix) $|y|=|x|$

x) $|y|=x$;

xi) $y=\text{sen}(x)$;

xii) $\text{sen}(y)=x$;

xiii) $y=\text{tang}(x)$;

xiv) $\text{tang}(y)=x$;

xv) $y=\sqrt{x^2}$.

Soluzioni.

Ricordiamo che, per ogni espressione, dobbiamo indicare il dominio A ed il codominio B.

i) $y=x$. Definisce una funzione. Il dominio è $A=\mathbb{R}$ ed il codominio è $B=\mathbb{R}$.

ii) $y=x^2$. Definisce una funzione. Il dominio è $A=\mathbb{R}$ ed il codominio è $B=[0,+\infty$.

iii) $y^2=x$. Non definisce una funzione perché per ogni $x \geq 0$ esistono due y che rendono vera l'uguaglianza. Precisamente $y=\pm\sqrt{x}$.

iv) $y=\frac{1}{x}$. Definisce una funzione. Il dominio è $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed il codominio è $B=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

v) $y=\sqrt{x}$; Definisce una funzione. Il dominio è $A=[0,+\infty)$ ed il codominio è $B=[0,+\infty)$.

vi) $y = x^3$. Definisce una funzione. Il dominio è $A = \mathbb{R}$ ed il codominio è $B = \mathbb{R}$.

vii) $y^3 = x$. Definisce una funzione. Il dominio è $A = \mathbb{R}$ ed il codominio è $B = \mathbb{R}$.

viii) $y = |x|$. Definisce una funzione. Il dominio è $A = \mathbb{R}$ ed il codominio è $B = \mathbb{R}$.

ix) $|y| = |x|$ Non definisce una funzione. Per ogni $x \neq 0$ esistono due y per cui l'uguaglianza è vera. Precisamente $y = \pm|x| = \pm x$.

x) $|y| = x$. Non definisce un funzione. Per $x < 0$ non c'è alcun y che rende vera l'uguglianza. Per ogni $x > 0$, esistono due y che rendono vera l'uguaglianza. Precisamente $y = \pm x$.

xi) $y = \text{sen}(x)$. Definisce una funzione. Il dominio è $A = \mathbb{R}$ ed il codominio è $B = [-1, 1]$.

xii) $\text{sen}(y) = x$. Non definisce una funzione. Per ogni $x \in [1, 1]$ esitono infiniti y per cui l'uguaglianza è vera. Vedi definizione di arcsen(x).

xiii) $y = \text{tang}(x)$. Definisce una funzione. Il dominio è tutti i reali esclusi i multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$. Il codominio è $B = \mathbb{R}$.

xiv) $\text{tang}(y) = x$. Non definisce una funzione. Vedi definizione di arctangente di x.

xv) $y = \sqrt{x^2}$. Poiché è $\sqrt{x^2} = |x|$, si tratta del caso *viii*.

Esercizio I.4.2

Quali delle seguenti funzioni, $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è iniettiva? Quale surgettiva? Quale bigettiva?

i) $f(x) = x$;

ii) $f(x) = x^2$;

iii) $f(x) = x^3$;

iv) $f(x) = |x|$;

v) $f(x) = \sqrt{x}$ (definita in $[0, +\infty)$);

vi) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

vii) $f(x) = \frac{1}{x}$ (definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$);

viii) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$);

ix) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$;

x) $f(x) = 2^x$.

Soluzioni.

Ricordiamo che una funzione è iniettiva se, e solo se, vale la seguente condizione: $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$. Una funzione è surgettiva se l'imagine è tutto B, ciò significa che per ogni $y \in B$ esiste almeno un $x \in A$ tale he $f(x) = y$. Una funzione è bigettiva se è sia iniettiva che surgettiva. Ricordiamo che, per rispondere alle domande, è essenziale fissare con chiarezza gli insiemi di partenza (domini) e gli insiemi dei arrivo (codomini). Ogni funzione diventa surgettiva se prendiamo come insieme di arrivo la sua immagine.

i) $f(x)=x$. È ovvio che è $f(x_1)=f(x_2) \iff x_1=x_2$. Inoltre, per ogni $y\in\mathbb{R}$ è $y=f(y)$. La funzione è, quindi, iniettiva e surgettiva, dunque bigettiva.

ii) $f(x)=x^2$. Non è iniettiva perché $(x^2)=(-x)^2$ $x \neq -x$ per $x \neq 0$. Non è surgettiva peché $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e non può essere negativo.

iii) $f(x)=x^3$. La funzione è iniettiva. Infatti consideriamo due numeri x_1 e x_2 diversi fra di loro. Possiamo supporre che sia $x_2 \neq 0$. La quantità $x_1^3 - x_2^3$ si scompone come segue (vedi capitolo sui polinomi).

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) =$$

$$= (x_1 - x_2)x_2 \left(\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \frac{x_1}{x_2} + 1 \right) .$$

Il trinomio di secondo grado nell'ultima parentesi tonda ha discriminante negativo, quindi non si annulla per nessun numero reale. L'ultimo membro dela catena di uguaglianze si annulla soltanto se è nullo il fattore $(x_1 - x_2)$. Quindi è vero che

$$x_1^3 = x_2^3 \iff x_1 = x_2 .$$

La questione della surgettività è delicata a questo livello di esposizione. Occorrerebbe dimostrare che per ogni $y\in\mathbb{R}$ esiste almeno un $x \in \mathbb{R}$ tale che sia $x^3 = y$. Questa proposizione è la definizione della radice cubica: si scrive $x = \sqrt[3]{y}$. La cosa va bene se la funzione radice cubica è definita per ogni numero reale. Disgraziatamente questo fatto è conseguenza della surgettività della funzione

$f(x)=x^3$. Siamo caduti in un circolo vizioso. Per spezzare questo circolo vizioso occorre provare per altra via la surgettività della funzione $f(x)=x^3$. La cosa è fattibile facilmente usando strumenti che saranno studiati nel corso di matematica universitario. Si usano due concetti: il concetto di estremo superiore ed estremo inferiore ed il concetto di continuità di una funzione. La cosa è anche fattibile a questo livello di conoscenze, ma richiede l'uso molto raffinato della definizione di numero reale. Qui ci limitiamo a dire che la cosa " è intuitivamente ovvia". Allora la funzione $f(x)=x^3$ è bigettiva.

iv) $f(x) = |x|$. La funzione non è iniettiva perché , per $x \neq 0$, è $|x|=|-x|$. Non è surgettiva perché è $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

v) $f(x)=\sqrt{x}$ (definita in $[0,+\infty)$). Il testo dell'esercizio dice che la funzione è definita su $[0,+\infty)=\mathbb{R}^+$. Si deve, quindi, intendere che l'insieme di arrivo sia $\mathbb{R}$. La funzione è iniettiva. Infatti, presi due numeri x_1 e x_2 di cui uno, ad esempio x_2, non nullo, è $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} \neq 0$ ed allora è

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0 \iff (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = 0 \iff$$

$$\iff x_1 - x_2 = 0\,.$$

La funzione non è surgettiva perché non assume mai valori negativi.

vi) $f(x) = \sqrt[3]{x}$. La funzione è iniettiva. Il fatto è conseguenza della iniettività della funzione $f(x)=x^3$. Infatti è

$$\sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{x_2} \iff \left(\sqrt[3]{x_1}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x_2}\right)^3 \iff x_1 = x_2\,.$$

La funzione è surgettiva, infatti per ogni $y \in \mathbb{R}$ è

$$y = \sqrt[3]{\left(y\right)^3} .$$

vii) $f(x) = \frac{1}{x}$ (definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Anche in questo caso occorre supporre che l'insieme di arrivo sia tutto $\mathbb{R}$. La funzione è iniettiva. Infatti è

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \iff x_2 = x_1 .$$

La funzione non è surgettiva perché non assume mai il valore 0.

viii) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). La funzione non è iniettiva perché è

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-x)^2} .$$

La funzione non è surgettiva perché non assume mai valori negativi.

ix) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. La cosa sarà più chiara nel capitolo della trigonometria. Comunque la funzione non iniettiva perché è periodica: $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$. La funzione non è surgettiva perché la sua immagine è l'intervallo $[-1, 1]$.

x) $f(x) = 2^x$. La funzione è iniettiva per le proprietà delle potenze. La funzione non è surgettiva perché non assume mai valori negativi.

Esercizio I.4.3

Date le seguenti coppie di funzioni$f$, g, determinare le funzioni ottenute dalla composizione $f \circ g$ e $g \circ g$.

i) $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x+1$.

ii) $f(x)=x^2$; $g(x)=x+1$.

iii) $f(x)=|x|$; $g(x)=x-1$.

iv) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $g(x)=x+1$.

v) $f(x)=x^2$; $g(x)=\mathrm{sen}(x)$.

Soluzioni.

Ricordiamo che è

$$\Big(f \circ g\Big)(x) \;=\; f\Big(g(x)\Big) \,.$$

i) $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x+1$. $f \circ g(x)=\sqrt{x+1}$; $g \circ f(x)=\sqrt{x}+1$.

ii) $f(x)=x^2$; $g(x)=x+1$. $f \circ g(x)=(x+1)^2$; $g \circ f(x)=x^2+1$.

iii) $f(x)=|x|$; $g(x)=x-1$. $f \circ g(x)=|x-1|$; $g \circ f(x)=|x|-1$.

iv) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $g(x)=x+1$. $f \circ g(x)=\dfrac{1}{x+1}$; $g \circ f(x)=\dfrac{1}{x}+1$.

v) $f(x)=x^2$; $g(x)=\mathrm{sen}(x)$. $f \circ g(x)=\mathrm{sen}^2(x)$; $g \circ f(x)=\mathrm{sen}(x^2)$.

Esercizio I.4.4

Dimostrare che

i) Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sono iniettive, anche la funzione

$$g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$$

è iniettiva.

ii) Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sono surgettive, anche la funzione

$$g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$$

è surgettiva.

iii) Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sono bigettive, anche la funzione

$$g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$$

è bigettiva.

Soluzioni.

i)

La iniettività di f e di g ci dice che è

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2 \text{ e } g(y_1) = g(y_2) \iff y_1 = y_2 \,.$$

Allora è

$$g\Big(f(x_1)\Big) = g\Big(f(x_2)\Big) \iff f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2 \,.$$

ii)

La surgettività di f ci dice che $f(\mathcal{A})=\mathcal{B}$. La surgettività della funzione g ci dice che è $g(\mathcal{B})=\mathcal{C}$. Allora è

$$g\Big(f(\mathcal{A})\Big) = g(\mathcal{B}) = \mathcal{C} .$$

iii)

Il fatto è ovvia conseguenza delle due precedenti proposizioni: se f e g sono iniettive e surgettive, allora anche $g \circ f$ è iniettiva e surgettiva.

Esercizio I.4.5

Dimostrare che le seguenti funzioni sono invertibili e scriverne la funzione inversa.

i) $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

ii) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}_*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Soluzioni.

Ricordiamo che una funzione è invertibile se è iniettiva e surgettiva. Se consideriamo come codominio la sua immagine, ogni funzione diventa surgettiva e quindi è invertibile se, e solo se, è iniettiva. Ricordiamo inoltre che, per la stessa definizione, è

$$f\Big(f^{-1}(x)\Big) = x \quad \text{e} \quad f^{-1}\Big(f(x)\Big) = x .$$

i)

Nell'esercizio *I*4.2.*iii* abbiamo visto che la funzione $f(x)=x^3$ è iniettiva e surgettiva , quindi invertibile. La sua funzione inversa è $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

ii)

Questo esercizio chiarisce la precisazione iniziale. Se consideriamo come dominio $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e come codominio $\mathbb{R}$, la funzione è iniettiva ma non surgettiva. Se consideriamo come dominio $\mathbb{R}_*$ e come codominio l'immagine che è $\mathbb{R}_*$, la funzione diventa bigettiva ed invertibile. La funzione inversa è $y = \dfrac{1}{x}$. Infatti è

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}}\,.$$

I.4.1 Manipolazioni

Presentiamo ora in forma estremamente semplice alcune manipolazioni. Per illustrarle useremo il grafico della parabola $y=x^2$.

Disegneremo i grafici delle funzioni

i) $y=f(x)$;

ii) $y=f(x+c)$; traslazione parallela all'asse delle x;

iii) $y=f(cx)$, $x>1$; dilatazione in direzione dell'asse delle x'

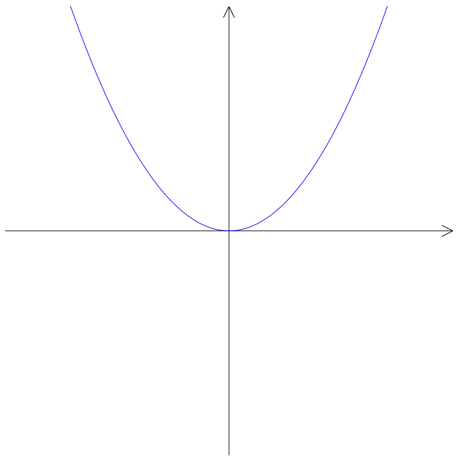
iv) $y=f(cx)$, $0<x<1$; contrazione in direzione dell'asse delle x;

v) $y=f(x)+c$; traslazione parallela all'asse delle y;

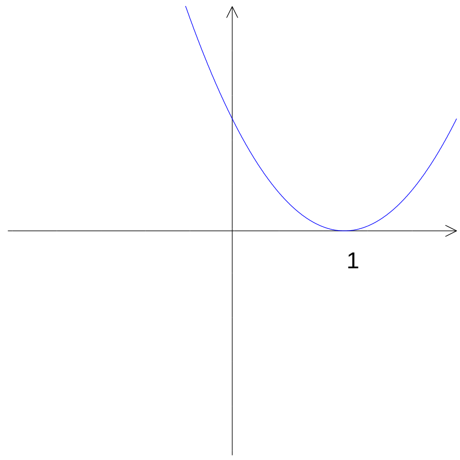
vi) $y=cf(x)$; dilatazione in direzione dell'asse delle y;

vii) $y=cf(\frac{x}{c})$, $c>1$; dilatazione radiale dall'origine'

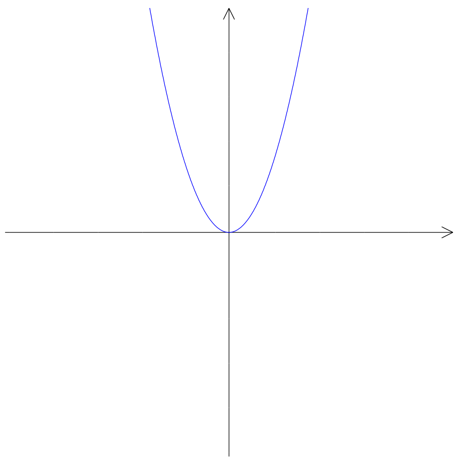
viii) $y=cf(\frac{x}{c})$, $0<x<1$; compressione radiale verso l'origine.



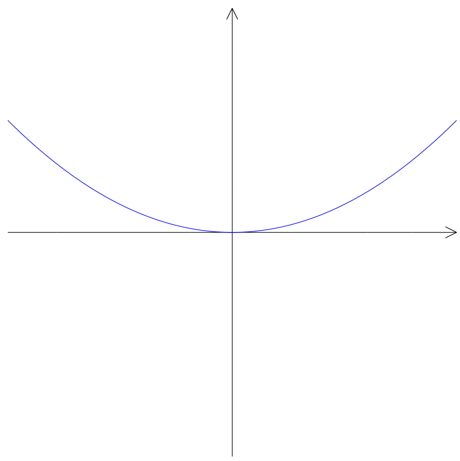
i) : Funzione iniziale.



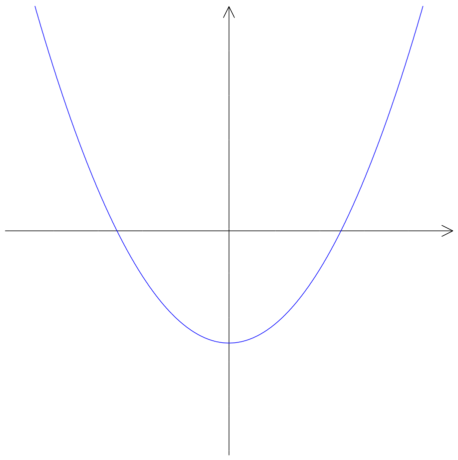
ii) : Traslata parallela all'asse delle x.



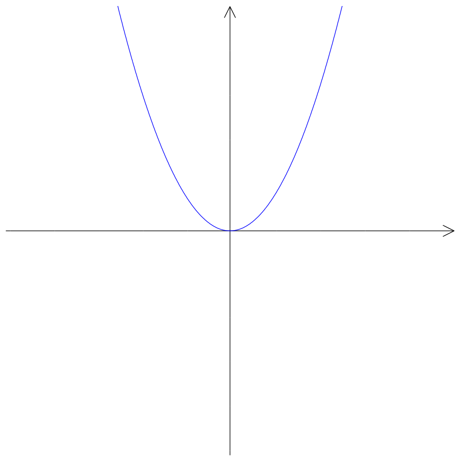
iii) : Compressione verso l'asse delle x.



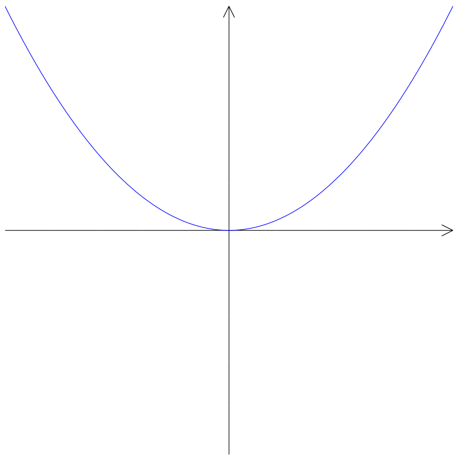
iv) : Dilatazione verso l'asse dell x.



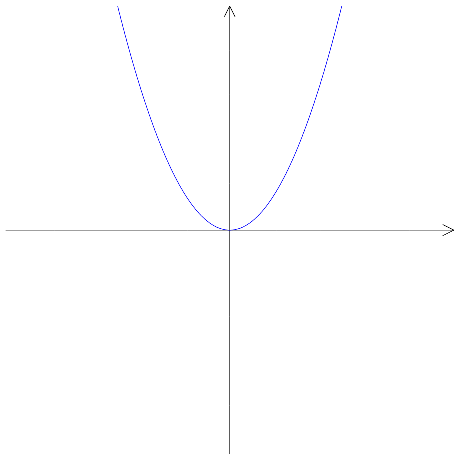
v) : Traslata parallela all'asse delle y.



vi) : Dilatazione verso l'asse delle y.



vii) : Dilatazione radiale.



viii) : Compressione radiale.

Le precedenti figure mostrano nell'ordine il grafico della funzione $y = f(x)$, nel caso particolare si tratta della parabola di equazione $y = x^2$. Nella seconda seconda figura è mostrato il grafico della funzione $y = f(x-c)$, nel caso particolare, $y = (x-1)^2$. Se immaginiamo il grafico disegnato su un lucido sovrapposto agli assi cartesiani, ilgrafico di $f(x-c)$ si ottiene da quello iniziale traslando il grafico parallelamente all'asse delle x verso destra, se è $c > 0$, e verso sistra, se è $c < 0$, della quantita' $|c|$.

Per capire il terzo e quarto grafico, bisogna pensare il grafico iniziale disegnato su un piano cartesiano di gomma. Nel caso *iii*) si ha una compressione verso l'asse delle x. Nel caso *iv*) si ha una dilatazione che allontana dall'asse delle x. I grafici mostrano due casi di $y = f(cx)$. Ciò se è $c > 0$. Se è $c < 0$, oltre alla dilatazione/compressione, si ha una simmetria rispetto all'asse delle y, cioè il grafico è ribaltato rispetto all'asse delle x. Il quarto grafico mostra il grafico di $y = f(x) + c$. Si tratta di una traslazione parallela all'asse delle y. La quinta figura mostra il grafico di $y = cf(x)$. Questa volta il piano di gomma viene dilatato o compresso parallelamente all'asse delle y.

Le figure *vii*) e *viii*) mostrano il caso delle omotetie, diltazioni o compressioni radiali, da o verso l'origine. La formula è

$$y = f\left(\frac{x}{c}\right).$$

Esercizio I.4.6

Rappresentare nel piano cartesiao le seguenti funzioni.

i) $$f(x) = \begin{cases} x+3 \text{ se è } x \geq 1 , \\ \dfrac{x^2}{3} + 1 \text{ se è } x < 1 . \end{cases}$$

ii) $$f(x) = \sqrt{|x| - 1} .$$

iii) $f(x) = |x^2 - |x|| \,.$

iv) $f(x) = \sqrt{|x-1|} \,.$

Soluzioni.

i)

Per $x \geq 1$, si tratta di una retta. Per $x < 1$ si tratta della parabola di equazione $y = \frac{x^2}{3}$ traslata di 1 verso l'alto. Vedi la figura I.24 di pagina 83.

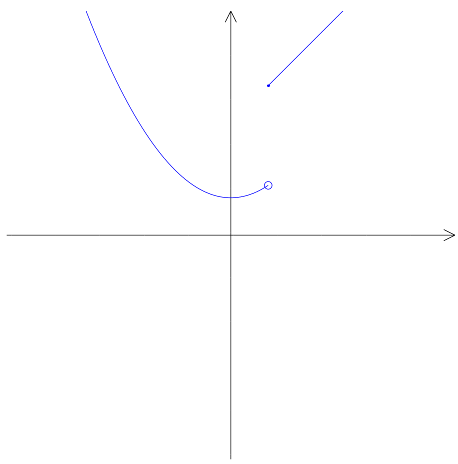


Figura I.24: Esercizio I4.6.i)

ii)

La funzione è definita se è $x'geq1$ oppure $x'leq-1$. Per $x \geq 1$ si tratta della parabola avente come asse l'asse delle$x$ traslata di 1 verso destra. Vedi la figura I.25 di pagina 84.

iii)

Dato il grafico di una funzione $y=f(x)$, il grafico della funzione $y=|f(x)|$ si ottiene lasciando invariata la parte di grafico al di sopra dell'asse delle

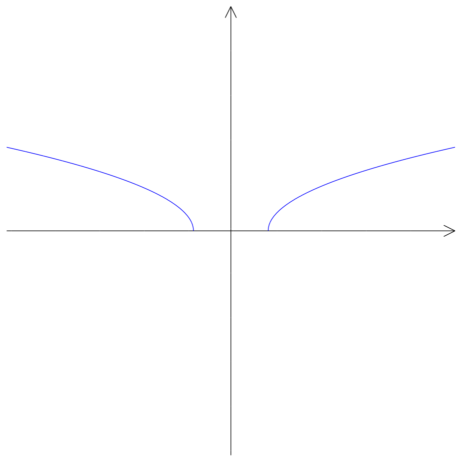


Figura I.25: Esercizio I4.6.ii)

y e ribaltando la parte delle $y < 0$ simmetricamente rispetto all'asse delle y. Per $Y > 0$ si tratta della parabola d equazione $= x^{-}x$, per $x < 0$ si tratta della parabola di equazione $y = x^2 + x$. Vedi la figura I.26 di pagina 85.

iv)

Per $x \geq !$ si tratta della parabola, avente come asse l'asse dell x, con il vertice in $x = 1$ e concavità verso le x crescenti. Per $x < 1$ si ha il grafico simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = 1$. Vedi la figura I.27 di pagina 85.

Esercizio I.4.7

Disegnare per punti e confrontare fra loro i grafici delle funzioni

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad f(x) = x^2 \quad , \quad f(x) = x \; ,$$

$$f(x) = x^{-1} \quad , \quad f(x) = x^{-2} \quad , \quad f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \; .$$

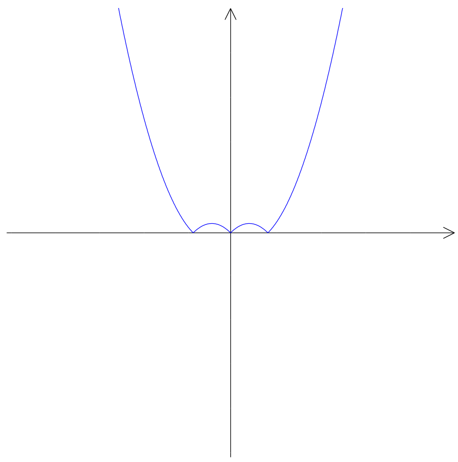


Figura I.26: Esercizio I4.6.iii)

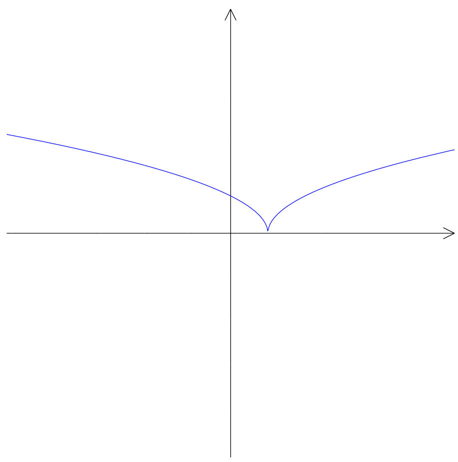


Figura I.27: Esercizio I4.6.iv))

Soluzioni.

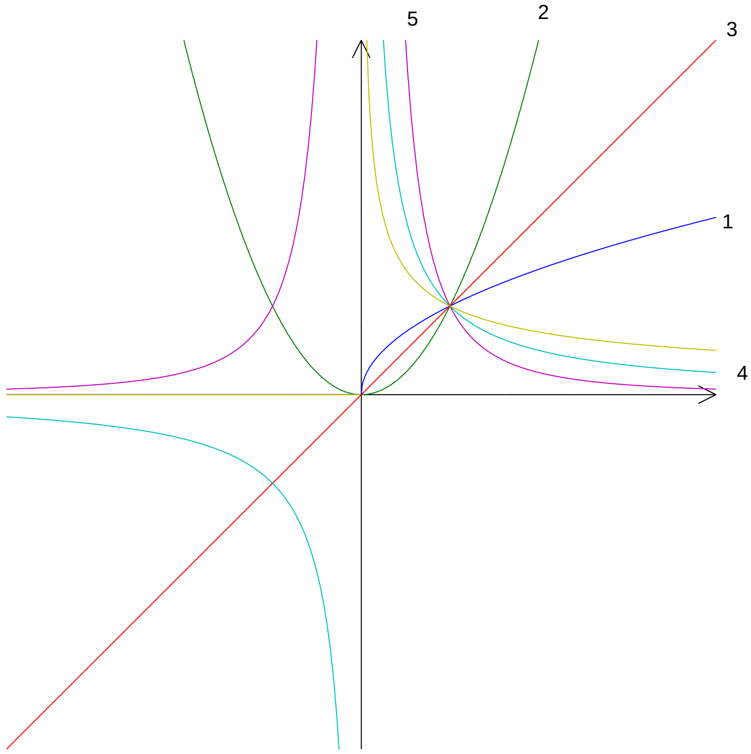


Figura I.28: Esercizio I4.7.i))

La figura I.28 di pagina 86 mostra i vari grafici. Il numero accanto ad ogni grafico indica l'ordine con cui la funzione compare nel testo dell'esercizio.

Esercizi di riepilogo

Esercizio I.4.8

Individuare il dominio delle seguenti funzioni considerate come funzioni reali di variabile reali.

i) $f(x) = \log\Big((x-1)(x+2)\Big)$;

ii) $f(x) = \log\Big(x^3-8\Big)$;

iii) $f(x) = \log\Big((x+2)^3\Big)$;

iv) $f(x) = \log\Big(\frac{x+2}{|x|}\Big)$.

Soluzioni.

i)

Occorre che l'argomento del logaritmo sia strettamente maggiore di 0. Si tratta di un polinomio di secondo grado. Lo studente resista alla tentazione di svolger i calcoli per applicare la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado! Le radici sono esplicitamente date: sono $x=1$ e $x=-2$. Il dominio è $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

ii)

Si tratta ancora di un logaritmo, il suo argomento deve essere strettamente maggiore di 0. Il binomio x^3-8 si scompone come segue:

$$x^3-8 \;=\; x^3-2^3 \;=\; (x-2)(x^2+2x+4)\,.$$

Il polinomio di secondo grado ha discriminante, $4-16$, negativo, quindi è positivo per ogni x. Il binomio x^3-8 ha lo stesso segno do $x-2$. Il dominio è $(2,+\infty)$.

iii)

Ancora un logaritmo. Il segno di $(x-2)^3$ è lo stesso di $(x-2)$, quindi il dominio è $(2,\infty)$.

iv)

L'argomento del logaritmo deve esistere ed essere strettamente maggiore di 0. Affinché esista la frazione occore che sia $x \neq 0$. A questo punto il segno dela frazione è dato dal segno $(x+2)$. Il dominio è $(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

Esercizio I.4.9

Date le seguenti funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$ e $g(x)=2x+1$ determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.

Soluzione.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x+1)^3 + |2x+1|\ ,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x^3+x)+1 = 2x^3+2x+1\ .$$

Esercizio I.4.10

Disegnare il grafico delle seguenti funzioni.

i) $f(x)=x-|x|$;

ii) $f(x)=x+|x|$;

iii) $f(x)=x+|x-1|$.

Soluzioni.

i)

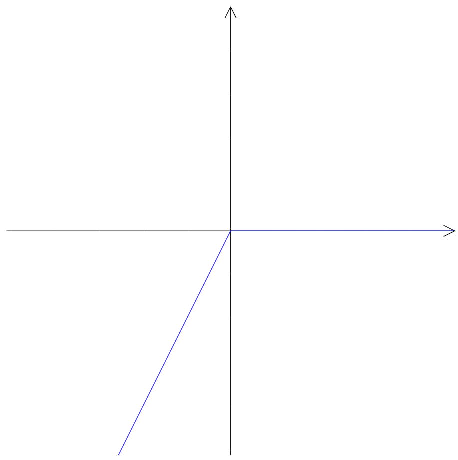


Figura I.29: Esercizio I4.10.i))

Si tratta di una linea spezzata. Per $x > 0$ è $f(x(=0$, per $x < 0$ è $f(x) = 2x$. Il grafico è mostrato nella figura I.29 di pagina 89.

ii)

Si tratta di una linea spezzata. Per $x > 0$ è $f(x(= 2x$, per $x < 0$ è $f(x) = 0$. Il grafico è mostrato nella figura I.30 di pagina 89.

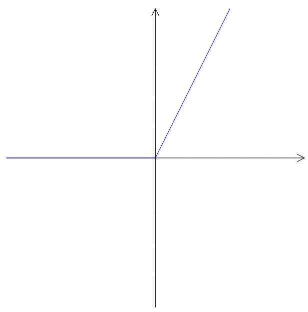


Figura I.30: Esercizio I4.10.ii))

iii)

Si tratta di una linea spezzata. Per $x > 1$ è $f(x(= 2x - 1$, per $x < 1$ è $f(x) = 1$. Il grafico è mostrato nella figura I.31 di pagina 90.

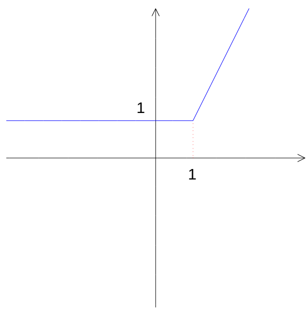


Figura I.31: Esercizio I4.10.iii))

Esercizio I.4.11

Dire se le seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sono iniettive e/o surgettive

Funzione	Iniettiva	Surgettiva
$f(x) = 2x - 5$	si	si
$f(x) = x^2$	no	no
$f(x) = x^3$	si	si
$f(x) = x^2 + 4x + 4$	no	no
$f(x) = x^3 - x^2$	no	si
$f(x) = 2^x$	si	no
$f(x) = \|x^8 - 8\|$	no	no
$f(x) = \|x - 8\|$	no	no

Le risposte sono state inserite nella tabella.

Esercizio I.4.12

Date le seguenti funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=2\log_2(x)$, $g(x)=x^3+5$, $h(x)=|x|$, determinare $f \circ g \circ h)(x)$.

Soluzione.

$$f\Big(g\Big(h(x)\Big)\Big) \;=\; 2\log_2\Big(\Big(|x|^3+5\Big)\Big)\,.$$

Esercizio I.4.13

Data la funzione $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=3x+5$, dimostrare che è bigettiva e determinare la funzione inversa di f.

Soluzione.

La funzione è iniettiva, infatti è

$$3x_1+5=3x_2+5 \iff 3x_1=3x_2 \iff x_1=x_2\,.$$

Per dimostare che è surgettiva occorre dimostrare che, per ogni $y\in\mathbb{R}$, l'equazione $3x+5=y$ ha almeno una soluzione. Si tratta di una equazione algebrica di primo grado la cui soluzione è

$$x=\frac{y-5}{3}\,.$$

La soluzione della precedente eqquazione fornisce l'espressione della funzione inversa che, usando le giuste variabili, è

$$y \;=\; f^{-1}(x) \;=\; \frac{x-5}{3}\,.$$

Esercizio I.4.14

Quante sono le soluzioni dell'equazione $2^x = \mathrm{sen}(x)$?

Soluzione.

La soluzione si deduce per via grafica: in $(-\infty, 0)$ l'esponenziale assume tutti i valori fra 0 ed 1. Il grafico del seno oscilla infinte volte fra -1 ed 1. Ci sono infinite soluzioni, tutte negative. Vedi figura I.32 di pagina 92.

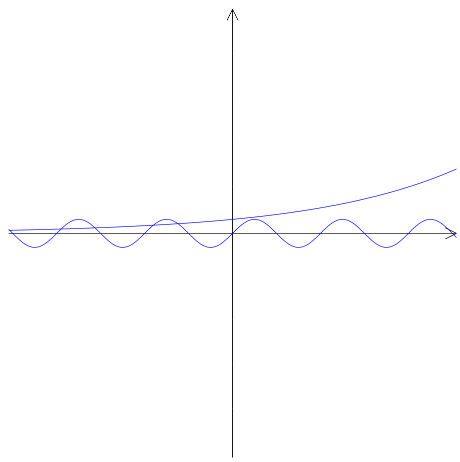


Figura I.32: Esercizio I4.14.i))

Esercizio I.4.15

Sia $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$. Si determini il numero di tutte le funzioni bigettive$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Soluzione.

Si tratta del numero di permutazioni di 4 elementi. Il numero è 24!. Infatti il primo numero può essere scelto in 4modi. Per ciascuna delle scelte il secondo numero può essere scelto in 3 modi. Per ciascuna doppia scelta il terzo numero pu'oc essere scelto in 2. Infine, dopo aver scelto i primi tre numeri, il quarto è obbligatoriamente quello rimasto.

Esercizio I.4.16

Siano $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si determini il numero di tutte le funzioni iniettive $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Soluzione.

Si tratta di determinare in quanti modi si possono disporre cinque oggetti in quattro scatole. Il numero è il numero di disposizioni di 5 oggetti su 4 posti. Tale numero è

$$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \,.$$

Infatti il primo oggetto può essere scelto in 5 modi. Il secondo oggetto pu'oc essere scelto in 4 modi. Il terzo oggetto può essere scelto in 3 modi. Il quarto oggetto può essere scelto in 2 modi.

I.5 Polinomi

Esercizio I.5.1

Eseguire le seguenti somma:

i) $(6x^2 + \sqrt{2}x + 3) + (x^3 + \frac{1}{2}x + 2)$;

ii) $(6x^2 + \sqrt{2}x + 3) + (x^2 + \frac{1}{2}x + 2)$;

iii) $(6x^2 + \sqrt{2}x + 3) + (-6x^2 + \frac{1}{2}x + 2)$.

Soluzioni.

i)

La somma è

$$(0+1)x^3 + (6+0)x^2 + (\sqrt{2} + \frac{1}{2})x + (3+2) =$$

$$= x^3 + 6x^2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2}x + 5 .$$

ii)

La somma è

$$(6+1)x^2 + (\sqrt{2} + \frac{1}{2})x + (3+2) =$$

$$= 7x^2 + \frac{\sqrt{2}+1}{2}x + 5 .$$

iii)

La somma è

$$(6-6)x^2 + (\sqrt{2} + \frac{1}{2})x + (3+2) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2}x + 5 .$$

Esercizio I.5.2

Eseguire i seguenti prodotti.

i) $(6x^4 + \sqrt{3}x^2 + \pi x + 2) \cdot (x^3 - 3x + 8)$;

ii) $(4x^3 + x + 3) \cdot 8(x^4 + 6x^2 + 1)$;

iii) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)$.

Soluzioni.

i)

Il prodotto vale

$$(6x^4 + \sqrt{3}x^2 + \pi x + 2) \cdot (x^3) + (6x^4 + \sqrt{3}x^2 + \pi x + 2) \cdot (-3x) +$$

$$+(6x^4 + \sqrt{3}x^2 + \pi x + 2) \cdot (+8) =$$

$$= +6x^7 + \sqrt{2}x^5 + \pi x^4 + 2x^3 +$$

$$-18x^5 - 3\sqrt{3}x^3 - 6x +$$

$$+48x^4 + 8\sqrt{3}x^2 + \pi x + 16 =$$

$$= 6x^7 + (\sqrt{2} - 18)x^5 + (\pi + 48)x^4 + (2 - 3\sqrt{3})x^3 +$$

$$+8\sqrt{3}x^2 + (\pi - 6)x + 16\,.$$

ii)

Il prodotto vale

$$(4x^3 + x + 3) \cdot (8x^4) + (4x^3 + x + 3) \cdot (6x^2) + (4x^3 + x + 3) \cdot (+1) \ =$$

$$= \ 32x^7 + 8x^5 + 24x^4 + 24x^5 + 6x^3 + 18x^2 + 4x^3 + x + 3 \ =$$

$$= \ 32x^7 + 32x^5 + 24x^4 + 10x^3 + 18x^2 + x + 3\,.$$

iii)

Il prodotto vale

$$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x) +$$

$$+(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (-1) \ =$$

$$= \ x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \ =$$

$$= \ x^6 - 1\,.$$

Si nota che il grado del polinomio prodotto è esattamente la somma dei gradi dei due polinomi fattori.

Esercizio I.5.3

Calcolare

$$\Big(\Big((a_4x + a_3) \cdot x + a_2\Big) \cdot x + a_1\Big) \cdot x + a_0 \,.$$

Generalizzare i risultato ottenuto in modo da ottenere una formula valida per un generico polinomio di grado n.

Soluzione

È

$$\Big(\Big((a_4x + a_3) \cdot x + a_2\Big) \cdot x + a_1\Big) \cdot x + a_0 \;=$$

$$= \Big(\Big(a_4x^2 + a_3x + a_2\Big) \cdot x + a_1\Big) \cdot x + a_0 \;=$$

$$= \Big(a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1\Big) \cdot x + a_0 \;=$$

$$= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \,.$$

Si vede che si ottiene la forma standard del polinomio di 4° grado. Allora per un polinomio di grado n, $P_n(x)44$, possiamo scrivere

$$\Big(\cdots\cdots\Big(a_nx + a_{n-1}\Big) \cdot x + a_{n-2}\Big) \cdot x + a_{n-3}\Big) \cdots\Big) \cdot x + a_0 \,,$$

dove ci sono esattamente $(n-1)$ parentesi tonde aperte ed $(n-1)$ parentesi tonde chiuse.

Esercizio I.5.4

Dimostrare che, se un polinomio $P(x)$ è invertibile, cioè esiste un polinomio $Q(x)$ tale che $P(x) \cdot Q(x) = 1$, allora $P(x)$ deve essere di grado 0.

Soluzione.

Per l'osservazione in fondo all'eserecizio $I5.2$, il grado del prodotto è la somma dei gradi dei fattori. Sia n il grado di $P(x)$ e k il Grado di $Q(x)$, dovrà essere

$$n + k \; = \; 0 \;\Longrightarrow\; n = 0 \;\text{ e }\; k = 0\,.$$

Quindi sia P che Q saranno polinomi di grado 0.

Esercizio I.5.5

i) Calcolare il polinomio di 3° grado che, per $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, assume rispettivamente i valori $-1,\ 2,\ 3,\ -4$.

ii) Calcolare il polinomio di 4° grado che, per $x = 0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2}$, *mezzo*, assume rispettivamente i valori $0,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{16}$.

Soluzioni.

i)

Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dovrà essere

$$\begin{cases} d = -1\,, \\ a + b + c + d = 2\,, \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ 27a + 9b + 3c + d = -4\,. \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema si ottiene facilmente per sostituzione ed è

$$\begin{cases} a = -1 \,, \\ b = 2 \,, \\ c = 2 \,, \\ d = -1 \,. \end{cases}$$

Il polinomio è

$$P(x) \;=\; -x^3 + 2x^2 + 6x - 1 \,.$$

ii)

Sia $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, dovrà essere

$$\begin{cases} e = 0 \,, \\ a + b + c + d + e = 1 \,, \\ a - b + c - d + e = 1 \,, \\ \frac{1}{16}a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{2}d + e = \frac{1}{16} \,, \\ \frac{1}{16}a - \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{2}d + e = \frac{1}{16}' : . \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema, ottenuta per sostituzione, è

$$\begin{cases} a = 1 \,, \\ b = c = d = e = 0 \,. \end{cases}$$

Il polinomio è $P(x) = x^4$.

Esercizio I.5.6

Eseguire le seguenti divisioni:

i) $(x^2+2x+1):(x+1)$;

ii) $(x^2+2x+\sqrt{2}):(x+1)$;

iii) $(x^7+x^5+85x^3+\sqrt{3}x^2+e:(2x^3+x)$;

iv) $(x^5+\sqrt{3}x^4-\sqrt{5}x):(x^6+6x^4+2005x^2)$;

v) $(x^7+a^7):(x+a)$;

vi) $(x^7-a^7):(x-a)$;

v) $x^7:(x-a)$.

i)

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +2x & +1 & x+1 \\ \cline{4-4} -x^2 & -x & & x+1 \\ \hline = & +x & +1 & \\ & -x & -1 & \\ \cline{2-3} & = & = & \end{array}$$

Il quoziente è $x+1$, il resto è 0.

ii)

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +2x & +\sqrt{2} & x+1 \\ \cline{4-4} -x^2 & -x & & x+1 \\ \hline = & +x & +\sqrt{2} & \\ & -x & -1 & \\ \cline{2-3} & = & +\sqrt{2}-1 & \end{array}$$

Il Quoziente è $x + 1$, il resto è $+\sqrt{2} - 1$.

iii)

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
+x^7 & +x^5 & +85x^3 & +\sqrt{3}x^2 & & +e & 2x^3 + x \\
\cline{7-7}
-x^7 & -\frac{1}{2}x^5 & & & & & \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{339}{8} \\
\hline
= & +\frac{1}{2}x^5 & +85x^3 & +\sqrt{3}x^2 & & +e & \\
 & -\frac{1}{2}x^5 & -\frac{1}{4}x^3 & & & & \\
\cline{2-6}
 & = & \frac{339}{4}x^3 & +\sqrt{3}x^2 & & +e & \\
 & & -\frac{339}{4}x^3 & & -\frac{339}{8}x & & \\
\cline{3-6}
 & & = & +\sqrt{3}x^2 & -\frac{339}{8}x & +e &
\end{array}
$$

Il quoziente è $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{339}{8}$, il resto è $+\sqrt{3}x^2 - \frac{339}{8}x + e$.

iv)

Poiché il grado del divisore è maggiore del grado del denominatore, il quoziente è 0 ed il resto coincide con il dividendo.

v)

$$
\begin{array}{rr|l}
+x^7 & +a^7 & x+a \\ \cline{3-3}
-x^7 & -ax^6 & x^6-ax^5+a^2x^4-a^3x^3+a^4x^2-a^5x+a^6 \\ \cline{1-2}
-ax^6 & +a^7 & \\
+ax^6 & +a^2x^5 & \\ \cline{1-2}
+a^2x^5 & +a^7 & \\
-a^2x^5 & -a^3x^4 & \\ \cline{1-2}
-a^3x^4 & +a^7 & \\
+a^3x^4 & +a^4x^3 & \\ \cline{1-2}
+a^4x^3 & +a^7 & \\
-a^4x^3 & -a^5x^2 & \\ \cline{1-2}
-a^5x^2 & +a^7 & \\
+a^5x^2 & +a^6x & \\ \cline{1-2}
+a^6x & +a^7 & \\
-a^6x & -a^7 & \\ \cline{1-2}
= & = &
\end{array}
$$

Il quoziente vale $x^6-ax^5+a^2x^4-a^3x^3+a^4x^2-a^5x+a^6$, il resro vale 0.

vi)

$$
\begin{array}{rr|l}
+x^7 & -a^7 & x-a \\ \cline{3-3}
-x^7 & +ax^6 & x^6+ax^5+a^2x^4+a^3x^3+a^4x^2+a^5x+a^6 \\ \cline{1-2}
+ax^6 & -a^7 & \\
-ax^6 & +a^2x^5 & \\ \cline{1-2}
+a^2x^5 & -a^7 & \\
-a^2x^5 & +a^3x^4 & \\ \cline{1-2}
+a^3x^4 & -a^7 & \\
-a^3x^4 & +a^4x^3 & \\ \cline{1-2}
+a^4x^3 & -a^7 & \\
-a^4x^3 & +a^5x^2 & \\ \cline{1-2}
+a^5x^2 & -a^7 & \\
-a^5x^2 & +a^6x & \\ \cline{1-2}
+a^6x & -a^7 & \\
-a^6x & +a^7 & \\ \cline{1-2}
= & = &
\end{array}
$$

Il quoziente vale $x^6+ax^5+a^2x^4+a^3x^3+a^4x^2+a^5x+a^6$, il resto vale 0.

Esercizio I.5.7

Scomporre le seguenti frazioni:

i) $\dfrac{x^4}{x^2+1}$;

ii) $\dfrac{2x^2-x-1}{2x-3}$;

i) $\dfrac{4x^3+3x^2+100}{x^2+4x+13}$.

Soluzioni.

i)

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^4 & & & x^2+1 \\ \cline{4-4}
-x^4 & -x^2 & & x^2-1 \\ \cline{1-2}
= & -x^2 & & \\
 & +x^2 & +1 & \\ \cline{2-3}
 & = & +1 &
\end{array}
$$

La frazione si scompone nella seguente maniera:

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2-1+\frac{1}{x^2+1} \, .$$

ii)

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & -x & -1 & 2x-3 \\ \cline{4-4}
-2x^2 & +3x & & x+1 \\ \cline{1-3}
= & +2x & -1 & \\
 & -2x & +3 & \\ \cline{2-3}
 & = & +2 &
\end{array}
$$

La frazione si scompone nella seguente maniera:

$$\frac{2x^2-x-1}{2x-3} = x+1+\frac{2}{2x-3} \, .$$

iii)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & +3x^2 & & +100 & x^2+4x+13 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & -16x^2 & -52x & & 4x-15 \\ \cline{1-4}
= & -13x^2 & -52x & +100 & \\
 & +13x^2 & +52x & +169 & \\ \cline{2-5}
 & = & = & 269 &
\end{array}
$$

La frazione si scompone nella seguente maniera:

$$\frac{4x^3+3x^2+100}{x^2+4x+13} = 4x-13+\frac{269}{x^2+4x+13} \, .$$

Esercizio I.5.8

Scomporre in fattori irriducibili i seguenti polinomi.

i) $x^6 + x^3 - 2$;

ii) $x^4 + 5x^2 + 4$;

iii) $x^3 + 2x^2 - 10x + 7$;

iv) $x^3 + 3x^2 + 3x - 7$;

v) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$;

vi) $x^6 - 1$;

Soluzioni.

Non esistono regole per operare la scomposizione di polinomi. A parte i procedimenti empirici, ci sono due tentativi semistandard da fare. Si basano sulla scomposizione di un polinomio di secondo grado e sul teorema di Ruffini. Per trovare empiricamente le eventuali radi razionali di un polinomio, si sfrutta la seguente osservazione. Sia $P(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti interi della forma

$$P(x) \ = \ x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

allora le eventuali radici razionali sono necessariamente intere e devono essere un divisore del termine a_0. Se il polinomio è della forma

$$P(x) \ = \ a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

allora le eventuali radici razionali, espresse mediante una frazione ridotta ai mini termini della forma $\frac{p}{q}$ sono tali che p è un divisore di a_0 e q è un divisore di a_n. Una volta trovata una radice razionale, x_0, nel polinomio è fattorizzabile il fattore $x - x_0$.

Un polinomio di secondo grado, $ax^2 + bx + c$, con discriminante non negativo è fattorizzabile come$a(x - x_1)(x - x_2)$, dove x_1 e x_2 sono due radici eventualmente coincidenti. Infine un teorema generale garantisce che ogni polinomio a coefficienti reali è scomponibile in fattori di primo e di secondo grado irriducibili.

i)

Poniamo $x^3 = t$, otteniamo il polnomio di 2° grado $t^2 + t - 2$. Le radici di questo polinomio sono

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} .$$

Il polinomio nella variabile t si scompone come

$$t^2 + t - 2 = (t - 1)(t + 2) .$$

Ritorniamo alla variabile x, otteniamo la scomposizione

$$x^6 + x^3 - 2 = (x^3 - 1)(x^3 + 2) .$$

Ciascuno dei due fattori è ulteriormente scomponibile. Attraverso i prodotti notevoli otteniamo che è

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) ,$$

$$x^3 + 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) .$$

Calcoliamo il discriminante dei due polinomi di secondo grado, Δ_1 del primo polinomio e Δ_2 del secondo polinomio.

$$\Delta_1 = -1 - 4 < 0 .$$

$$\Delta_2 \;=\; (\sqrt[3]{2})^2 - 4\sqrt[3]{4} \;=\; -3\sqrt[3]{4} < 0\,.$$

I due polinomi hanno entrambi discriminante negativo e sono, di conseguenza, irriducibili. La scomposizione finale che si ottiene eļa seguente

$$x^6 + x^3 - 2 \;=\; (x-1)(x+\sqrt[3]{2})(x^2+x+1)(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})\,.$$

ii)

Questa volta poniamo $x^2 = t$ ed otteniamo il polinomio $t^2 + 5t + 4$. L eradici sono

$$t \;=\; \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \;=\; \frac{-1 \pm 3}{2}\,.$$

Otteniamo la scomposizione nella variabile t

$$t^2 + 5t + 4 \;=\; (t+1)(t+4)\,.$$

Passiamo alla variabile x, otteniamo la scomposizione

$$x^4 + 5x^2 + 4 \;=\; (x^2+1)(x^2+4)\,.$$

Ambedue i polinomi di secondo grado sono irriducibile, non hanno radici reali, quindi la scomposizione ottenuta è quella finale.

iii)

Affrontiamo la soluzione in due modi diversi. Le uniche radici razionali possono essere ± 1 e ± 7. Provando i quattro valori si scopre che soltanto 1 è una radice. Il polinomio è divisibile per $(x-1)$. Eseguiamo la divisione.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
+x^3 & +2x^2 & -10x & +7 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+3x-7 \\ \cline{1-4}
= & 3x^2 & -10x & +7 & \\
 & -3x^2 & +3x & & \\ \cline{2-4}
 & = & -7x & +7 & \\
 & & +7x & -7 & \\ \cline{3-4}
 & & = & = &
\end{array}
$$

Troviamo le radici del quoziente:

$$x \;=\; \frac{-3 \pm \sqrt{9+28}}{2} \;=\; \frac{-3 \pm \sqrt{37}}{2} \; .$$

Il polinomio si scompone come

$$x^3 + 2x^2 - 10x + 7 \;=\; (x-1)\left(x + \frac{3+\sqrt{37}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{37}}{2}\right) \; .$$

Alternativamente possiamo proceder in modo più empirico. Scriviamo il polinomio come

$$x^3 + 2x^2 - 10x + 7 \;=\; x^3 + 2x^2 - 3x - 7x + 7 \;=$$

$$=\; x(x^2 + 2x - 3) - 7(x-1) \; .$$

Troviamo le radici del polinomio di secondo grado in parentesi tonda.

$$x \;=\; -1 \pm \sqrt{1+3} \;=\; -1 \pm 2 \begin{array}{l} \nearrow \;\; +1 \\ \\ \searrow \;\; -3 \end{array} \; .$$

La scomposizione procede come segue

$$x^3 + 2x^2 - 10x + 7 \;=\; x(x-1)(x+3) - 7(x-1) \;=$$

$$= (x-1)(x^2+3x-7) .$$

A questo punto si prosegue come nel metodo precedente.

iv)

Affrontiamo la soluzione in due modi diversi. Le uniche radici razionali possono essere ± 1 e ± 7. Provando i quattro valori si scopre che soltanto 1 è una radice. Il polinomio è divisibile per $(x-1)$. Eseguiamo la divisione.

$$\begin{array}{rrrr|l}
+x^3 & +3x^2 & +3x & -7 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+4x+7 \\ \cline{1-4}
= & 4x^2 & +3x & -7 & \\
 & -4x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & = & +7x & -7 & \\
 & & -7x & +7 & \\ \cline{3-4}
 & & = & = &
\end{array}$$

Troviamo le radici del quoziente:

$$x = -2 \pm \sqrt{4-7} .$$

Il polinomio ha discriminante negativo ed è, quindi, irriducibile. La scomposizione è

$$x^3+2x^2-10x+7 = (x-1)(x^2+4x+7) .$$

Alternativamente possiamo proceder nel modo più empirico. Scriviamo il polinomio come

$$x^3+3x^2+3x-7 = x^3+3x^2-4x+7x-7 =$$

$$= x(x^2+3x-4)+7(x-1) .$$

Troviamo le radici del polinomio di secondo grado in parentesi tonda.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \ +1 \\ \searrow \ -4 \end{array} .$$

La scomposizione procede come segue

$$x^3 + 2x^2 - 10x + 7 = x(x-1)(x+4) + 7(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2 + 4x + 7) .$$

A questo punto si prosegue come nel metodo precedente.

v)

In questo caso si verifica facilmente che ± 1 sono radici ed anzi -1 è radice doppia. Però è più semplice la via empirica. Fra i primi due addendi si mette in evidenza un fattore x^3:

$$x^5 - x^3 + x^2 - 1ugx^3(x^2-1) + (x^2-1) = (x^2-1)(x^3+1) .$$

Ambedue i fattori sono riducibili attraverso usando gli appropriati prodotti notevoli.

$$x^5 - x^3 + x^2 - 1 = (x_1)(x+1)(x+1)(x^2 - x + 1) .$$

Il fattore di secondo grado ha discriminante negativo e non è riducibile.

vi)

Anche in questo caso la via empirica attraverso i prodotti notevoli appare più semplice.

$$x^6 - 1 = (x^3-1)(x^3+1) =$$

$$= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1) \, .$$

I fattori di secondo grado hanno discrimante negativo e non sono riducibili.

Esercizio I.5.9

Calcolare, per i seguenti polinomi, il resto della divisione per $(x-2)$ senza eseguire l'operazione.

i) $x^3 + 2x^2 - 10x + 5$;

ii) $x^6 - 2x^5 - 10$;

iii) $-x^4 + x^3 + 3x + 2$.

Soluzioni.

In base al teorema di Ruffini, il resto vale, nei vari casi, $P(2)$.

i)

$$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 5 = 8 + 8 - 20 + 5 = 1 \, .$$

ii)

$$P(2) = 2^6 - 2 \cdot 2^5 - 10 = 64 - 64 - 10 = -10 : .$$

iii)

$$P(2) = -2^4 + 2^3 + 3 \cdot 2 + 2 = -16 + 8 + 6 + 2 = 0 \, .$$

Esercizio I.5.10

Eseguire le seguenti divisioni.

i) $(x^5 + a^5) : (x + a)$;

ii) $(x^6 - a^6) : (x^2 - a^2)$;

iii) $(x^5 - a^5) : (x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$.

Soluzioni.

Si possono eseguire le divisione usando il metodo standard. Però può essere più costruttivo eseguire le divisioni usando le scomposizioni dei prodotti notevoli.

i)

$$(x^5 + a^5) = (x + a)(x^4 - +ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4) ,$$

quindi il risultato della divisione è

ii)

$$(x^6 - a^6) = (x^3 - a^3)(x^3 + a^3) =$$

$$= (x - 1)(x^2 + ax + a^2)(x + a)(x^2 - ax + a^2) =$$

$$= x^2 - a^2)(x^4 + a^2x^2 + a^4) .$$

iii)

Dalla scomposizione

$$(x^5 - a^5) = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) ,$$

si deduce che è

$$(x^5 - a^5) : (x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) \;=\; (x - a)\,.$$

Esercizio I.5.11

Calcolare il M.C.D. ed il m.c.m. dei seguenti polinomi.

i) $x^3 - 1)$ e $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$;

ii) $2x^2 - 3)$ e $\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$;

Soluzioni.

i)

Scomponiamo i due polinomi.

$$x^3 - 1 \;=\; (x - 1)(x^2 + x + 1)\,.$$

Per scomporre il secondo polinomio osserviamo che 1 non è radice. Vediamo se è divisibile per $x^2 + x + 1$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+x^4 & +x^3 & +2x^2 & +x & +1 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2+1 \\ \cline{1-5}
= & = & +x^2 & +x & +1 & \\
 & & -x^2 & -x & -1 & \\ \cline{3-5}
 & & = & = & = &
\end{array}$$

Allora il secondo polinomio si scompone come

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \;=\; (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)\,.$$

Allora è

$$M.C.D. \; = \; x^2 + x + 1 \, .$$

$$m.c.m. \; = \; *x - 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) \, .$$

ii)

Il primo polinomio si scompone come

$$2x^2 - 3 \; = \; (\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3}) \, .$$

Calcoliamo le radici del secondo polinomio.

$$x \; = \; \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3} \pm \sqrt{2 + 3 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} \; =$$

$$= \; \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3} \pm (+\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} \, ,$$

Le radici sono

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad -1 \, .$$

il polinomio si scompone come

$$\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{3} \; = \; (x + 1)(\sqrt{2}x - \sqrt{3}) \, .$$

Allora è

$$M.C.D. \; = \; (\sqrt{2}x - \sqrt{3}) \, .$$

$$m.c.m. \; = \; (x + 1)(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3}) \, .$$

Esercizi di riepilogo

Esercizio I.5.12

Determinare il numero di soluzioni reali delle seguenti equazioni:

i) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

ii) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$;

iii) $x^2 - 2x + 1 = 0$;

iv) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$;

v) $x^2 - 2754x + 1 = 0$;

vi) $x^2 + x + 5 = 0$;

vii) $x^4 + 2005 = 0$;

Soluzioni.

Occorre fare un po' di attenzione alla differenza fra "radice di un polinomio" e "soluione di una equazione". Specialmente quando ci si interroga sul loro numero. Quando nella scomposizione di un polinomio compare più volte lo stesso fattore, si parla di radice multipla. Ma una radice reale che compare tre volte, produce tre radici, ma una sola soluzione della corrispondente equazione.

i)

Calcoliamo il discriminante.

$$\Delta \;=\; 25 - 4 \cdot 6 \;=\; 1 > 0\,.$$

L'equazione ha due soluzini reali.

ii)

mettendo in evidenza una x otteniamo le seguente scomposizione:

$$x^3 - 5x^2 + 6x \;=\; x(x^2 - 5x + 6) = 0\,.$$

Il secondo fattore è lo stesso dell'esercizio precedente ed ha due raicireali e distinte entrambe diverse da 0. L'equazione a tre soluzioni reali, 0 e le due dell'equazione $x^2 5x + 6 = 0$.

iii)

Si tratta di un quadrato perfetto.

$$x^2 - 2x + 1 \;=\; (x-1)^2 = 0\,.$$

Il polnomio ha due radici reali e coincidenti, l'equazione ha una sola soluzione reale.

iv)

L'equazione si fattorizza come segue:

$$x^4 - 2x^2 + 1 \;=\; (x^2 - 1)^2 \;=\; 0\,.$$

Il polinomio ha quattro radici reali: due valgono 2 e due valgono -2. L'equazione ha due soluzioni reali.

v)

Il discriminante vale

$$\Delta \;=\; 2754^2 - 4 > 0\,,$$

L'equazione ha due soluzioni reali.

vi)

Il discriminante vale

$$\Delta = 1 - 20 < 0 ,$$

l'equazione non ha soluzioni reali.

vii)

A parte il calcolo del discriminante, si può osservare che la somma di due numeri non negativ vale 0 se, e solo se, entrambi i numeri sono nulli. Il secondo addendo non è nullo, quindi l'equazione non ha soluzioni reali.

Esercizio I.5.13

Risolvere le seguenti equazioni.

i) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$;

ii) $6x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$;

iii) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

iv) $x^8 - 6x^4 - 7 = 0$.

Soluzioni.

La tecnica per risolvere queste equazioni è di scomporre i polinomi nel prodotto di fattoi al più di secondo grado. Oppure, mediante un opportuno cambio di variabile, ridurre le equazioni ad una equazione di secondo grado.

i)

Si fattorizza.

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = 0 \, .$$

Una soluzione è $x=0$. Le altre due sono le radici del polinomio di secondo grado.

$$x \;=\; \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \;=\; \frac{5 \pm 1}{2} \;=\; \begin{array}{ll} \nearrow & 3 \\ \searrow & 2 \end{array} \, .$$

ii)

La somma dei coefficienti vale 0, quindi $x=1$ è una radice. Eseguiamo la divisione del polinomio per $(x-1)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -5x^2 & -2x & +1 & x-1 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +6x^2 & & & 6x^2+x-1 \\ \cline{1-4}
= & x^2 & -2x & +1 & \\
 & -x^2 & +x & & \\ \cline{2-4}
 & = & -x & +1 & \\
 & & +x & -1 & \\ \cline{3-4}
 & & = & = &
\end{array}$$

L'equazione si fattorizza come

$$6x^3 - 5x^2 - 2x + 1 \;=\; (x-1)(6x^2 + x - 1) \, .$$

Una soluzione è $x = 0$, le altre due sono le radici del polinomio di secondo grado.

$$x \;=\; \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \;=\; \frac{-1 \pm 5}{12} \;=\; \begin{array}{ll} \nearrow & \frac{1}{3} \\ \searrow & -\frac{1}{2} \end{array} \, .$$

iii)

Si abbassa di grado. Si pone $x^2 = t$ e si ottiene l'equazione

$$t^2 - 5t + 4 = 0\,,$$

le cui soluzioni sono

$$t \;=\; \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \;=\; \frac{5 \pm 3}{2} \;=\; \begin{array}{l} \nearrow \;\; 4 \\ \\ \searrow \;\; 1 \end{array} \,.$$

Ora si torna alla variabile x: deve essere

$$t = x^2 = 4 \;\;\Longrightarrow\;\; x = \pm 2\,,$$

oppure deve essere

$$t = x^2 = 1 \;\;\Longrightarrow\;\; x \;=\; \pm 1\,.$$

iv)

Anche in questo caso si abbassa di grado. Si pone $x^4 = t$ e si ottiene l'equazione

$$t^2 - 6t - 7 = 0\,,$$

le cui soluzioni sono, usando la formula ridottissima,

$$t \;=\; 3 \pm \sqrt{9+7} \;=\; 3 \pm 4 \;=\; \begin{array}{l} \nearrow \;\; 7 \\ \\ \searrow \;\; -1 \end{array} \,.$$

Ritorniamo alla variabile x. Deve essere

$$t = x^4 = 4 \implies x^2 = \pm 2\,.$$

L'equazione $x^2 = 2$ fornisce le soluzioni reali $x = \pm\sqrt{2}$. L'equazione $x^2 = -2$ non fornisce soluzioni reali. Oppure deve essere

$$t = x^4 = -1\,.$$

Questa equazione non ha soluzioni reali. In definitiva l'equazione data, di ottavo grado, ha solo due soluzioni reali.

Esercizio I.5.14

Dati i polinomi $p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$ e $q(x) = x - 1$, calcolare $p(x) : q(x)$.

Soluzione.

La divisione è stata eseguita nel corso dell'esercizio $I.5.13.ii)$. Il quoziente vale

$$p(x) : q(x) \;=\; 6x^2 + 4 - 1\,.$$

Esercizio I.5.15

Dati i polinomi $p(x)=6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$ e $q(x)=x^2 + 1$, determinare il quoziente ed il resto.

Soluzione.

Eseguiamo la divisione.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -5x^2 & -2x & +1 & x^2+1 \\
-6x^3 & & -6x & & \overline{6x-5} \\
\hline
= & -5x^2 & -8x & +1 & \\
 & +5x^2 & & +5 & \\
\cline{2-4}
 & = -8x & +6 & &
\end{array}
$$

Il quoziente vale $6x - 5$, il resto vale $-8x + 6$.

Esercizio I.5.16

Se $p(x)$ è divisibile per $x^2 - 3$, allora $\sqrt{3}$ è radice di $p(x)$?

Soluzione.

Poiché Il poilnomio è divisibile per $x^2 - 3$, esso si fattorizza come

$$p(x) \; = \; (x^2 - 3) \cdot q(x) \, ,$$

dove $q(x)$ è il quoziente. Quindi la risposta è affermativa.

Esercizio I.5.17

Un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali di grado 5 può avere 6 radici reali e distinte?

Soluzione.

Un polinomio a coefficienti reali di grado n, si fattorizza al più come prodotto di n polinomi di primo grado, quindi ha al più n radici reali e distinte.

La risposta è negativa.

Esercizio I.5.18

Un polinomio $p(x)$ a coefficienti realipuò avere una unica radice reale?

Soluzione.

La risposta è affermativa. Basta esibire un esempio: il polinomio di grado 5 $x^5 + x$ ha l'unica radice reale $x=0$.

In generale un polinomio a coefficienti reali di grado dispari ha sempre almeno una radice reale e può averne soltanto una. Ciò dipende dal fatto che qualsiasi polinomio a coefficienti reali si scompone nel prodotto di un certo numero di polinomi di primo grado ed in un certo numero di polinomi di secondo grado a discriminante negativo. Questi fattori non producono radici reali. Il prodotto di tutti i fattori di secondo grado, che non producono radici reali, è un polinomio di grado pari. Quindi, nella scomposizione di un polinomio di grado dispari, ci deve essere almeno un polinomio di primo grado che produce una radice reale.

I.6 Trigonometria

Esercizio I.6.1

Determinare, senza usare la calcolatrice, il valore di

$$i)\ \text{sen}(\alpha)\ \text{se è}\ \cos(\alpha) = \frac{1}{3}\ \text{ e }\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\,;$$

$$ii)\ \cos(\alpha)\ \text{se è}\ \text{sen}\alpha) = -\frac{1}{4}\ \text{ e }\ \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}\,.$$

Soluzioni.

i)

Essendo α nel primo quadrante, il valore del seno dovrà essere positivo.

$$\text{sen}(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,.$$

ii)

Questa volta siamo nel scondo o terzo quadrante, quindi il coseno dovrà essere negativo.

$$\cos(\alpha) = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Esercizio I.6.2

Dopo aver calcolato il seno ed il coseno dell'angolo $\frac{\pi}{6}$, ricavare da questi il seno ed il coseno degli angoli $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$,$-\frac{\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$.

Soluzioni.

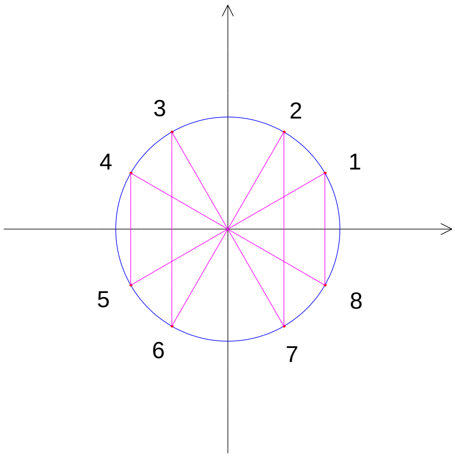


Figura I.33: Esercizio I.6.2i

Numeriamo gli angoli con i numeri da 1 a 8, essendo $\frac{\pi}{6}$ l'angolo numero1. Tutti gli angoli sono riportati nella figura I.33 di pagina 124.

Per ogni punto è disegnato un triangolo rettangolo i cui cateti hanno come lunghezza il valore assoluto del coseno e del seno dell'angolo con vertice nell'origine. Ciascun triangolo rettangolo è la metà di un triangolo equilatero i lato 1. Allora il cateto minore ha lunghezza $\frac{1}{2}$ ed l cateto maggiore ha lunghezza

$$\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Leggiamo, sulla figura le varie risposte.

Angolo 1 - $\alpha=\frac{\pi}{6}$, è $\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}(\alpha)=\frac{1}{2}$.

Angolo 2 - $\alpha=\frac{\pi}{3}$, è $\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$ e $\text{sen}(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Angolo 3 - $\alpha=\frac{2\pi}{3}$, è $\cos(\alpha)=-\frac{1}{2}$ e $\text{sen}(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Angolo 4 - $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, è $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Angolo 5 - $\alpha = \frac{7\pi}{6}$, è $\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}(\alpha) - = \frac{1}{2}$.

Angolo 6 - $\alpha = \frac{4\pi}{3}$, è $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ e $\text{sen}(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Angolo 7 - $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, seno e coseno sono gli stessi dell'angolo $\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$, allora è $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Angolo 8 - $\alpha = \frac{11\pi}{6}$, è $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

Esercizio I.6.3

Ricavare le rimanenti funzioni trigonometriche della'angolo α sapendo che è

i) $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{4}$ e $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$;

ii) $\text{tang}(\alpha) = \dfrac{1}{2}$ e $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$;

iii) $\text{sen}(\alpha) = -\dfrac{1}{3}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$.

Soluzioni

Per risolvere il secondo esercizio occorre saper calcolare il seno ed il coseno di un angolo conoscendone la tangente. Dalla defnzione analitica di tangente ricaviamo che è

$$\text{tang}^2(x) = \frac{\text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\text{sen}^2(x)}{1 - \text{sen}^2(x)} = \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} .$$

Dal primo e terzo membro ricaviamo la funzione seno.

$$\text{sen}(x) = (\pm)\frac{\text{tang}(x)}{\sqrt{1 + \text{tang}^2(x)}} ,$$

dove occorre usare il segno $+$ nel primo e quarto quadrante e il segno $-$ nel secondo e terzo quadrante.

Dal primo e quarto membro ricaviamo la funzione coseno.

$$\cos(x) \;=\; (\pm)\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2(x)}}\,,$$

dove occorre usare il segno $+$ nel primo e quarto quadrante e il segno $-$ nel secondo e terzo quadrante.

i)

Siamo nel quarto quadrante, quindi è

$$\mathrm{sen}(x) \;=\; -\sqrt{1-\frac{1}{16}} \;=\; -\frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{e} \quad \mathrm{tang}(x) \;=\; -\sqrt{15}\,.$$

ii)

Siamo nel primo quadrante, quindi è

$$\mathrm{sen}(\alpha) \;=\; \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\,,$$

$$\cos(\alpha) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} \;=\; \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

iii)

Siamo nel quarto quadrante, quindi è

$$\cos(\alpha) \;=\; \sqrt{1-\frac{1}{9}} \;=\; \frac{\sqrt{8}}{3} \quad \text{e} \quad \mathrm{tang}(\alpha) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{8}}\,.$$

Esercizio I.6.4

Quale è il campo di definizione della cotangente? Per quali angolo, ϑ, è possibile scrivere

$$\mathrm{cotang}(\vartheta) \;=\; \frac{1}{\mathrm{tang}(\vartheta)}\ ?$$

Soluzione.

Per poter usare la precedente formula occorre che ;la funzione tangente sia definita e diversa da 0. Deve, quindi, essere

$$\vartheta \neq k\frac{\pi}{2} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Esercizio I.6.5

Risolvere le seguenti equazioni in $[0, 2\pi]$ ed i $[-\pi, \pi]$

i) $\mathrm{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ii) $\mathrm{sen}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

iii) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

iv) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

v) $\mathrm{sen}(x) = \sqrt{3}$;

vi) $\mathrm{tang}(x) = \sqrt{3}$;

vii) $\mathrm{cotang}(x) = \sqrt{3}$.

Risolviamo prima le equazioni in $[0, 2\pi]$. Quelle in $[-\pi, \pi]$ si ottengono, se non lo sono già , aggiungendo o togliendo 2π. Useremo i dati della tabella 6.1 del testo di riferimento opportunamente integrati in base alle proprietà di simmetria.

i)

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad x = \frac{2\pi}{3}\,.$$

ii)

$$x = \frac{4\pi}{3} \quad \text{e} \quad x = \frac{5\pi}{3}\,.$$

iii)

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad x = \frac{11\pi}{6}\,.$$

iv)

$$x = \frac{5\pi}{6} \quad \text{e} \quad x = \frac{7\pi}{6}\,.$$

v)

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad x = \frac{4\pi}{3}\,.$$

vi)

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad x = \frac{7\pi}{6}\,.$$

Trasportiamo le soluzioni nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

i)

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad x = \frac{2\pi}{3} \; .$$

ii)

$$x = -\frac{5\pi}{3} \quad \text{e} \quad x = -\frac{2\pi}{3} \; .$$

iii)

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad x = -\frac{\pi}{6} \; .$$

iv)

$$x = \frac{5\pi}{6} \quad \text{e} \quad x = -\frac{5\pi}{6} \; .$$

v)

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad x = -\frac{2\pi}{3} \; .$$

vi)

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad x = -\frac{5\pi}{6} \; .$$

Esercizio I.6.6

Risolvere le seguenti equazioni in $[0, 2\pi]$.

i) $\sqrt{3}\text{tang}(x) = 1$;

ii) $\text{tang}^2(x) - 3 = 0$;

iii) $2\text{tang}^2 - \text{tang}(x) + 1(x) = 0$.

Soluzioni.

i)

Deve essere

$$\text{tang}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies x = \frac{\pi}{6} \text{ e } x = \frac{7\pi}{6} .$$

ii)

Deve essere $\text{tang}(x) = \pm\sqrt{3}$. Quindi è

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ e } x = \frac{2\pi}{3} \text{ e } x = \frac{4\pi}{3} \text{ e } x = \frac{5\pi}{3} .$$

iii)

Posto $\text{tang}(x) = t$, occorre risolvere l'euazione di secondo grado $2t^2 - t + 1 = 0$. Ma il discriminante vale $\Delta = 1 - 8 < 0$, quindi l'equazione non ha soluzioni.

Esercizio I.6.7

Risolvere su $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni.

i) $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ii) $\sqrt{2}\cos(x) = 1$;

iii) $4\text{sen}^2(x) - 1 = 0$;

iv) $\operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x) \;=\; 0$;

v) $\operatorname{tang}(x) \;=\; 1$;

vi) $\operatorname{tang}^2(x) \;=\; 3$;

vii) $\operatorname{cotang}(x) - \operatorname{cotang}(x) \;=\; 0$;

viii) $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{tang}(x) \;=\; 0$.

Soluzioni

Si sfrutta la solita tabella e le proprietà di periodicità e simmetria esposte. In particolare le seguenti:angoli supplementari hanno lo stesso seno; angoli opposto hanno lo steso coseno. Tangente e cotangente sono periodiche di periodo π. Inoltre tangente e cotangente, ristrette ad un periodo, sono iniettive.

i)

Deve essere

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \; k \in \mathbb{Z} \, .$$

Scrivendo $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, possiamo unificare le due formule nell'unica formula che segue.

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi \; k \in \mathbb{Z} \, .$$

ii)

Deve essere $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi deve essere

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \; k \in \mathbb{Z} \, .$$

iii)

Deve essere $\mathrm{sen}(x) = \pm\frac{1}{2}$, quindi deve essere

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Scrivendo $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, possiamo unificare le formule.

$$x = \pm\Big((-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\Big) \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

iv)

L'equazione si scompone come

$$\mathrm{sen}(x)\Big(\mathrm{sen}(x) - 2\Big) \;=\; 0\,.$$

Il secondo fattore non si annulla mai perché è $-1 \geq \mathrm{sen}(x) \geq 1$, per ogni x reale. Quindi l'equazione è equivalente a $\mathrm{sen}(x) = 0$. Le soluzioni sono $x = k\pi$ essendo $k \in \mathbb{Z}$.

v)

L'equazione è soddisfatta per

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

vi)

Deve essere $\mathrm{tang}(x) = \pm\sqrt{3}$, quindi deve essere

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

vii)

L'equazione si fattorizza come

$$\operatorname{cotang}(x)\Big(1-\operatorname{cotang}(x)\Big)\,.$$

Le soluzioni sono quelle dell'equazione $\operatorname{cotang}(x)=0$ e quelle dell'equazione $\operatorname{cotang}(x)=1$. Quindi sono

$$x\ =\ \frac{\pi}{2}+k\pi\ \ \text{o}\ \ x\ =\ \frac{\pi}{4}+k\pi\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

viii)

L'equazione si scompone come

$$\operatorname{sen}(x)\left(1-\frac{1}{\cos(x)}\right)=0\,.$$

Le soluzioni sono quelle della equazione $\operatorname{sen}(x)=0$ e quelle della equazione $\cos(x)=-1$. Precisamente sono

$$x=k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\ \ \text{o}\ \ x=(2k+1)\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Esercizio I.6.8

Qual'è il grafico della funzione cotangente? Quale è la sua parità ?Quali sono le sue proprietà di monotonia e simmetria?

Soluzione.

Il grafico è mostrato nella figura I.34 di pagina 134.

Trattandosi del rapporto fra una funzione dispari ed una funzione pari, la cotangente è una funzione dispari. In ogni intervallo del tipo

$$\Big(k\pi,(k+1)\pi\Big)\,,$$

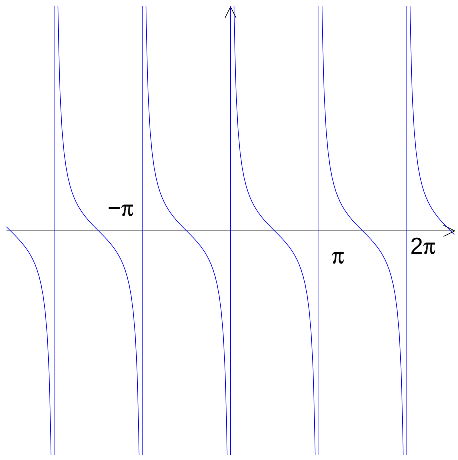


Figura I.34: Grafico della cotangente.

la funzione cotangente è monotona decrescente. Non è globalmente monotona nel suo campo di definizione.

Esercizio I.6.9

Individuare la periodicità delle seguenti funziopni e rappresentarle nel piano.

i) $y = \cos(2x)$;

ii) $y = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$;

iii) $y = 3\mathrm{sen}(2x)$;

iv) $y = |3\mathrm{sen}(2x)|$;

v) $y = 3\mathrm{sen}(-3x)$;

vi) $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

vii) $y = 3\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

Soluzioni.

Se la funzione $f(x)$ è periodica di periodo T, determiniamo il periodo, T', della funzione $g(x) = f(kx)$. Deve essere

$$g(x + T') = g(x) \iff f\Big(k(x + T')\Big) = f(kx) \iff$$

$$\iff f(kx + kT') = f(kx) \implies kT' = T \iff T' = \frac{T}{k}\,.$$

L etrslazioni,orizzontali o verticali, non cambiano il periodo.

i)

In base al calcolo preliminare il periodo è $T = \pi$. Il grafico è mostrato nella figura I.35 di pagina 135.

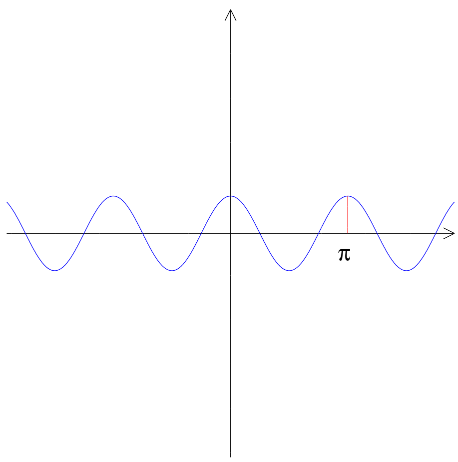


Figura I.35: Esercizio I.6.9i

ii)

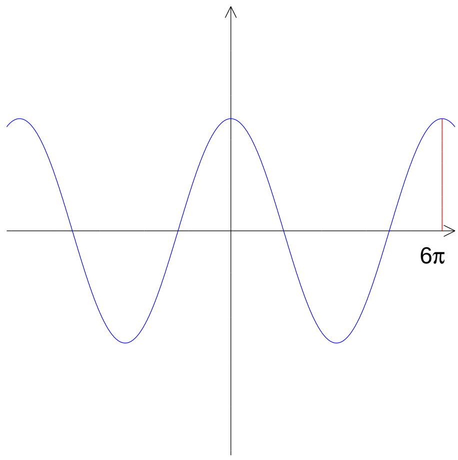


Figura I.36: Esercizio I.6.9ii

In base al calcolo preliminare il periodo è $T = 6\pi$. Il grafico è mostrato nella figura I.36 di pagina 136.

iii)

In base al calcolo preliminare il periodo è $T = \pi$. Il grafico è mostrato nella figura I.37 di pagina 137.

iv)

Si tratta del valore assoluto della funzione del caso iii). Poiché tale funzionè antisimmetrica rispetto a $\frac{\pi}{2}$ nell'intervallo$[0, \pi]$, la nuva funzione è periodica di periodo $\frac{\pi}{2}$. Il grafico è mostrato nella figura I.38 di pagina 137.

v)

In base al calcolo preliminare il periodo è $T = \pi$. Il grafico è mostrato nella figura I.39 di pagina 138.

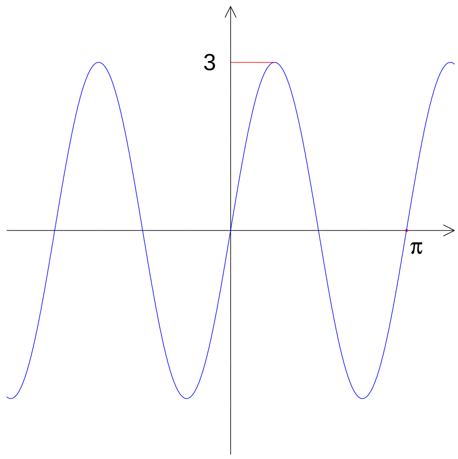


Figura I.37: Esercizio I.6.9iii

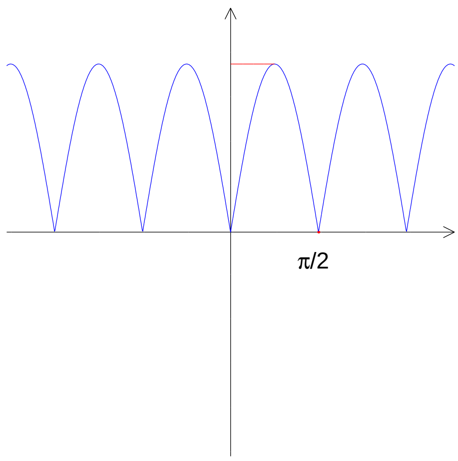


Figura I.38: Esercizio I.6.9iv

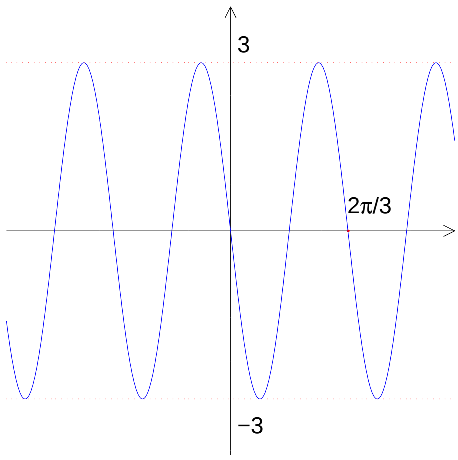


Figura I.39: Esercizio I.6.9v

vi)

In base al calcolo preliminare il periodo è $T = 2\pi$. Il grafico è mostrato nella figura I.40 di pagina 139.

vii)

In base al calcolo preliminare il periodo è $T = 2\pi$. Il grafico è mostrato nella figura I.41 di pagina 139.

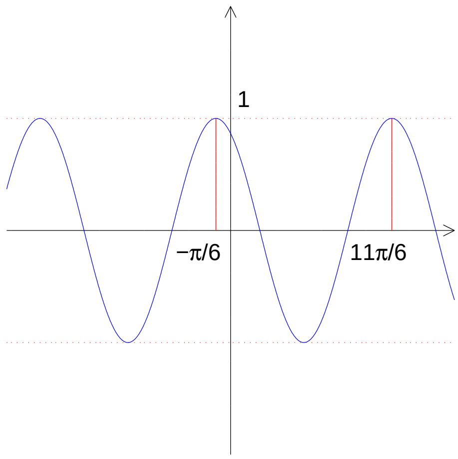


Figura I.40: Esercizio I.6.9vi

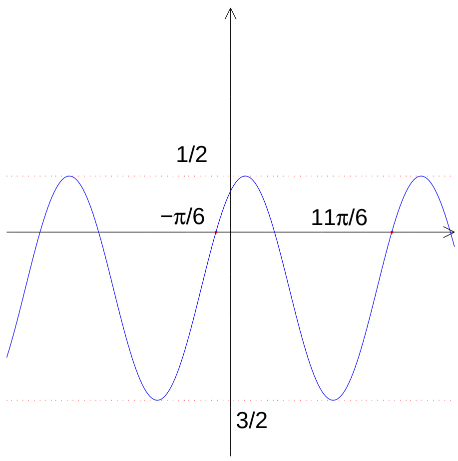


Figura I.41: Esercizio I.6.9vii

Esercizio I.6.10

Ricavare $\mathrm{tang}(\alpha \pm \beta)$ in funzione di $\mathrm{tang}(\alpha)$ e di $\mathrm{tang}(\beta)$, quando è possibile.

Soluzione.

Usando la definizone di tangente come rapporto fra seno e coseno, otteniamo che è

$$\mathrm{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta)} =$$

$$= \frac{\mathrm{tang}(\alpha) \pm \mathrm{tang}(\beta)}{1 \mp \mathrm{tang}(\alpha)\mathrm{tang}(\beta)} .$$

Il passaggio fra il secondo ed il terzo membro si ottiene dividendo numeatore e denominatore per $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

Esercizio I.6.11

Risolvere le seguenti equazioni.

i) $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$;

ii) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Soluzioni

i)

Usiamo le formule di addizione.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sen}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sen}(x) = 1 \iff$$

$$\iff \sqrt{2}\cos(x) = 1 \iff cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff$$

$$\iff x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

ii)

Risolveremo l'esercizio in due maniere diverse: usando le formule di addizione ed usando le proprietà di simmetria della funzioone coseno.

Prima soluzione. Applicando le formule di addizione otteniamo che è

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(x) + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sen}(x) = 0 \iff$$

$$\iff (1+\sqrt{3})\cos(x) = (1+\sqrt{3})\mathrm{sen}(x) \iff$$

$$\iff \cos(x) = \mathrm{sen}(x) \iff \mathrm{tang}(x) = 1 \iff$$

$$\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Seconda soluzione.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3} + \pi\right) \iff$$

$$\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{4}{3}\pi\right)\,.$$

Si è usato il fatto che è $-\cos(x) = \cos(x+\pi)$ per ogni x. Due coseni sono uguali se gli argomenti sono uguali od opposti modulo 2π, quindi otteniamo le condizioni

$$x + \frac{\pi}{6} = x + \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ ,$$

$$x + \frac{\pi}{6} = -x - \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ ,$$

La prima condizione non ha soluzioni perché sparisce la x. La seconda condizione fornisce

$$2x = -\frac{\pi}{6} - \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \implies x = -\frac{3}{4}\pi + k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

Sembra di aver ottnuto una soluzione differente, ma non è così . Infatti è $-\frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{4} - \pi$, quindi la soluzione si scrive

$$x = \frac{\pi}{4} - \pi + k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

L'ultima equivalenza deriva dal fatto che k è un numero arbitrario, cioè è un parametro che assume tutti i valori interi relativi. Anche $k-1$ è un parametro che assume tutti ivalori interi relativi.

Esercizio I.6.12

Risolvere le seguenti equazioni, dopo averle trasformate nella forma

$$\operatorname{sen}(x+\alpha) = k\ .$$

i) $\sqrt{3}\operatorname{sen}(x) - \cos(x) = 1$;

ii) $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 1$;

iii) $3\operatorname{sen}(x) + 4\cos(x) = 0$.

Soluzioni.

Si usa la seguente formula

$$a\operatorname{sen}(x) + b\cos(x) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x)\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x+\alpha) ,$$

dove è

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

i)

$$a = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad b = -1 \implies \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = +2 .$$

Allora è

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{1}{2} \implies \alpha = -\frac{\pi}{6} .$$

L'equazione diviene

$$2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 1 \iff \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} .$$

Le soluzioni sono

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

e cioè

$$x = 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

ii)

$$a = +1 \ \text{ e } \ b = +1 \implies \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,.$$

Allora è

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \alpha = \frac{\pi}{4}\,.$$

L'equazione diviene

$$\sqrt{2}\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ = \ 1 \iff \mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Le soluzioni sono

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

e cioè

$$x = 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

iii)

$$a = +3 \ \text{ e } \ b = +4 \implies \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

Allora è

$$\cos(\alpha) = \frac{3}{5} \quad , \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \text{arctang}\left(\frac{4}{3}\right) \, .$$

L'equazione diviene

$$5\text{sen}\,(x+\alpha) \; = \; 0 \, .$$

Le soluzioni sono

$$x+\alpha \; = \; k\pi \, , \; k \in \mathbb{Z} \;\; \Longleftrightarrow \;\; x \; = \; -\alpha + k\pi \, , \; k \in \mathbb{Z} \, .$$

Esercizio I.6.13

Rappresentare le seguenti funzioni.

i) $y = \text{sen}(x) - \cos(x)$;

ii) $y = 2\text{sen}(x) + 3\cos(x)$.

Si trasformano i secondi membri come nell'esercizio precedente, poi usando traslazioni e/o dilatazioni, si disegnano i grafici.

i)

$$a = +1 \;\; \text{e} \;\; b = -1 \;\; \Longrightarrow \;\; \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \, .$$

Allora è

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \text{sen}(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} \, .$$

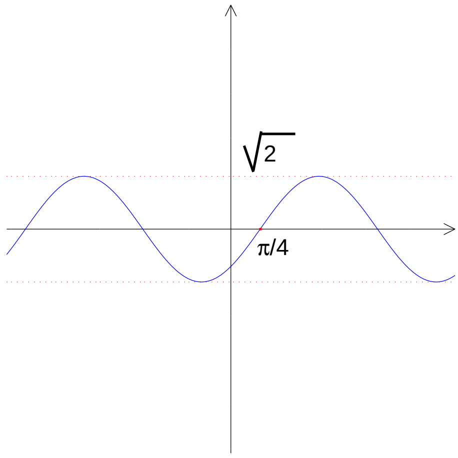


Figura I.42: Esercizio I.6.13i

La funzione diventa

$$y \;=\; \sqrt{2}\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{4})\,.$$

Il grafico è mostrato nella figura I.42 di pagina 146.

ii)

$$a=+2 \quad \text{e} \quad b=+3 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\,.$$

Allora è

$$\cos(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{13}} \quad , \quad \operatorname{sen}(\alpha)=\frac{3}{\sqrt{13}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha=\operatorname{arctang}\left(\frac{3}{2}\right)\,.$$

La funzione diventa

$$y \;=\; \sqrt{13}\operatorname{sen}(x+\alpha)\,.$$

Il grafico è mostrato nella figura I.43 di pagina 147.

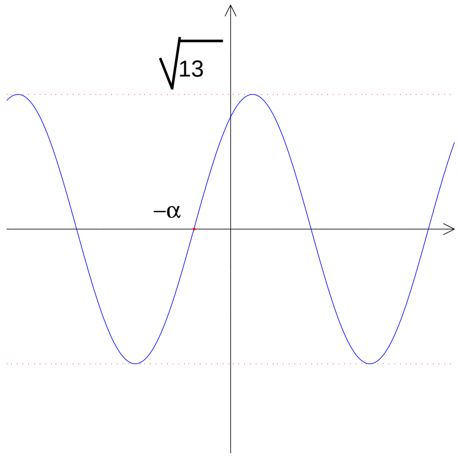


Figura I.43: Esercizio I.6.13ii

Esercizio I.6.14

Risolvere le seguenti equazioni.

i) $2\mathrm{sen}(2x) = \mathrm{tang}(x)$;

ii) $\mathrm{sen}(x) + \cos(x) = \cos(2x)$;

iii) $2\cos^2(\frac{x}{2}) + \cos(x) = 2$.

La tecnica di soluzione consiste nel tentare di esprimere tutti gli addendi com e potenza di una unica funzione trigonometrica. Poi si risolve la relativa equazione algebrica che risulta.

i)

Usando le formule di duplicazione e la definizione dellla funzione tangente, otteniamo la seguente equazione equivalente.

$$4\mathrm{sen}(x)\cos(x) \;=\; \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} \iff 4\mathrm{sen}(x)\cos^2(x) \;=\; \mathrm{sen}(x) \iff$$

$$\iff \operatorname{sen}(x)\Big(4\cos^2(x)-1\Big) \;=\; 0\,.$$

Le soluzioni sono quelle della equazione $\operatorname{sen}(x)=0$ e quelle della equazione $4\cos^2(x)-1=0$. Le soluzioni della prima equazione sono $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Quelle della seconda sono

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{o} \quad \pm\frac{5}{6}\pi+2k\pi\ ,\ : k\in\mathbb{Z}\,.$$

Essendo $\frac{5}{6}\pi \;=\; \pi-\frac{\pi}{6}$, possiamo unificare le due formule come

$$x \;=\; \pm\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\ : k\in\mathbb{Z}\,.$$

ii)

Deve essere

$$\operatorname{sen}(x)+\cos(x) \;=\; \cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x) \iff$$

$$\iff \operatorname{sen}(x)+\cos(x) \;=\; \Big(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)\Big)\Big(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\Big)\,.$$

O è

$$\operatorname{sen}(x)+\cos(x) \;=\; 0 \iff \operatorname{tang}(x) \;=\; -1 \iff$$

$$\iff x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Oppure è

$$\cos(x)-\operatorname{sen}(x) \;=\; 1\,.$$

Questa equazione, appartentemente molto semplice, è invece piuttosto complicata da risolvere. Se si sostituisce a $\cos(x)$ la sua espressione in termini di $\operatorname{sen}(x)$, a parte alcune complicazioni sui segni, si produce una equazione irrazionale. Si resta nell'ambito delle equazioni razionali esprimendo sia $\cos(x)$ che $\operatorname{sen}(x)$ in funzione della tangente dell'arco metà. Si ottiene la seguente equazione.

$$\frac{1-\operatorname{tang}^2(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{2\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \;=\; 1 \iff$$

$$\iff 1-\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}\right) \;=\; 1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}\right) \iff$$

$$\iff 2\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right) \;=\; 1+\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}\right) \iff$$

$$\iff \operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) \;=\; 0\,.$$

Deve essere

$$\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \iff \frac{x}{2} = k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \iff x = 2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Oppure deve essere

$$\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right) = -1 \iff \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \iff$$

$$\iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Risolviamo l'esercizio seguendo la prima idea. Deve essere

$$(\pm)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)} - \operatorname{sen}(x) = 1 \iff$$

$$\iff \quad (\pm)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)} = 1+\operatorname{sen}(x)\ .$$

Il segno $\pm$ dipende dal quadrante in cui ci si trova, ma non è questo il problema. Il secondo memmbro è non negativo, quindi a primo membro va preso il segno $+$. A questo punto eleviamo al quadrato ambo i membri ed otteniamo l'equazione

$$1-\operatorname{sen}^2(x) = 1+2\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}^2(x) \quad \iff$$

$$\iff \quad \operatorname{sen}(x)\Big(\operatorname{sen}(x)+1\Big) = 0\ .$$

Deve essere o

$$\operatorname{sen}(x) = 0 \quad \iff \quad x = \pi + k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

Oppure deve essere

$$\operatorname{sen}(x) = -1 \quad \iff \quad x\ =\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

Avendo operato un elevamento al quadrato occorre verificare se le soluzioni trovate soddisfano la equazione di partenza.

Se è $\operatorname{sen}(x) = 0$, deve essere $\cos(x) = 1$, quindi sono soluzione della equazione soltanto gli

$$x\ =\ 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

Se è $\operatorname{sen}(x)=-1$, allora è anche $\cos(x)=0$. Sono soluzione della equazione di partenza gli

$$x\ =\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

iii)

Usando le formule di bisezione, otteniamo l'equazione equivalente

$$1 + \cos(x) + \cos(x) = 2 \iff 2\cos(x) = 1 \iff$$

$$\iff \cos(x) = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \, .$$

Esercizio I.6.15

Risolvere le seguenti equazioni.

i) $\mathrm{sen}^2(x) - 2\mathrm{sen}(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 1$;

ii) $-\mathrm{sen}^2(x) - 2\sqrt{3}\mathrm{sen}(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 1$.

Soluzioni.

i)

Osserviamo che è $\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, quindi l'equazione diviene

$$-2\mathrm{sen}(x)\cos(x) = 0$$

Deve essere o

$$\mathrm{sen}(x) = 0 \iff x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \, .$$

Oppure deve essere

$$\cos(x) = 0 \iff x = \pi k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \, .$$

ii)

Si resiste alla tentazione di passare a $\cos(2x)$ e $\operatorname{sen}(x)$. Si dividono ambo i membri per $\cos^2(x)$, cosa lecita perché quando è $\cos(x)=0$ è $\operatorname{sen}^2(x)=1$ e ottiene l'uguaglianza assurda $-1=1$, e si usa l'identità

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tang}^2(x) ,$$

ottenendo l'equazione

$$-\operatorname{tang}^2(x) - 2\sqrt{3}\operatorname{tang}(x) + 1 \;=\; 1 + \operatorname{tang}^2(x) \;\iff$$

$$2\operatorname{tang}^2(x) + 2\sqrt{3}\operatorname{tang}(x) \;=\; 0 \;\iff$$

$$\iff\; \operatorname{tang}(x)\Big(\operatorname{tang}(x) + \sqrt{3}\Big) \;=\; 0 .$$

Deve essere o

$$\operatorname{tang}(x) \;=\; 0 \;\iff\; x \;=\; k\pi \;,\; k\in\mathbb{Z} .$$

Oppure deve essere

$$\operatorname{tang}(x) \;=\; -\sqrt{3} \;\iff\; x \;=\; \frac{\pi}{3} + k\pi \;,\; k\in\mathbb{Z} .$$

Esercizio I.6.16

Rappresentare le seguenti funzioni.

i) $y=\sqrt{3}\cos^2(x) + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \sqrt{3}\operatorname{sen}^2(x)$;

ii) $y=\operatorname{sen}^2(x) + 3\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 2\cos^2(x)$;

Soluzioni.

Prima di procedere al disegno, si manipolano le funzioni per renderle di più facile lettura.

i)

$$\sqrt{3}\cos^2(x) + 2\mathrm{sen}(x)\cos(x) - \sqrt{3}\mathrm{sen}^2(x) \ =$$

$$= \ \sqrt{3}\Big(\cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x)\Big) - \mathrm{sen}(2x) \ = \ \sqrt{3}\cos(2x) + \mathrm{sen}(2x) \ .$$

Usiamo la tecnica dell'esercizio I.6.12.

$$a = 1 \ \text{ e } \ b = \sqrt{3} \ \Longrightarrow \ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = +2 \ .$$

Allora è

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \ \ , \ \ \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \Longrightarrow \ \alpha = +\frac{\pi}{3} \ .$$

La funzione diviene

$$y \ = \ 2\mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \ .$$

Il grafico è mostrato nella figura I.44 di pagina 154.

ii)

Usando le formule di bisezione e di duplicazione, otteniamo la seguente forma equivalente della funzione.

$$y \ = \ \frac{1 - \cos(2x)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sen}(2x) - 1 - \cos(2x) \ =$$

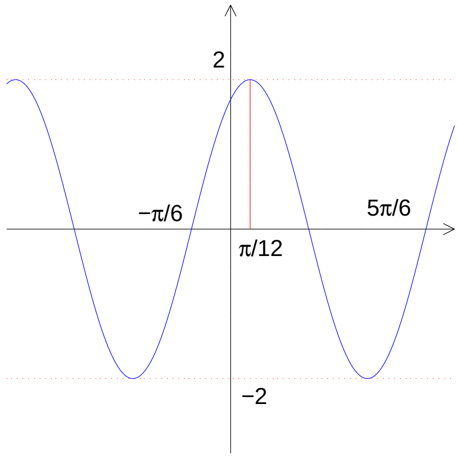


Figura I.44: Esercizio I.6.16i

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\,.$$

In definitiva si ottiene la forma

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\,.$$

Il grafico è mostrato nella figura I.45 di pagina 155.

Esercizio I.6.17

Risolvere le seguenti equazioni.

i) $\cos(x) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0\,;$

ii) $\dfrac{2(\cos(x) - \operatorname{sen}(x))}{\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + 1} + \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \cos(x)} = 0\,.$

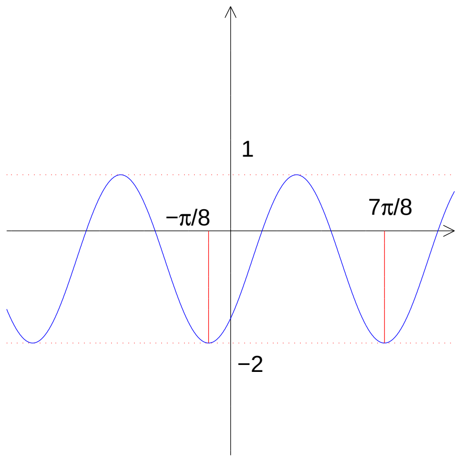


Figura I.45: Esercizio I.6.16ii

Soluzioni.

i)

La soluzione di questa equazion richiede soltanto l'uso della formula di bisezione del coseno. Otteniamo l;equazione equivalente

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \iff \operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Le soluzioni sono

$$\frac{x}{2} \pm \operatorname{arctang}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

e cioè

$$x \;=\; \pm 2\mathrm{arctang}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

ii)

In questo caso è utile un pesante lavoro con le espressioni di seno e coseno in funzione della tangente dell'arco metà . Per brevità scriveremo t invece di tang $\left(\frac{x}{2}\right)$. L'equazione diviene

$$\frac{2\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-\dfrac{2t}{1+t^2}\right)}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}+1}+\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=0\ .$$

Riducendo le due megafrazioni a due frazioni più semplici, otteniamo la seguente equazione.

$$\frac{2(1-2t-t^2)}{1-t^2+2t+1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2+1-t^2}\;=\;0\iff$$

$$\iff\frac{1-2t-t^2}{1+t}+t=0\iff(1-2t-t^2)+t(1+t)=0\iff$$

$$\iff 1-t=0\iff t=1\ .$$

Il passaggio fra il primo ed il secondo membro della penultima catena di equazioni è lecito se è $t+1\neq 0$.

Dopo tanto lavoro siamo giunti alla equzione, equivalente a quella iniziale,

$$\mathrm{tang}\left(\frac{x}{2}\right)=1\ ,$$

le cui soluzioni sono

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\iff x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

Esercizio I.6.18

Con riferimento al triangolo della figura I.46 di pagina 157, risolvere i triangoli conoscendo i seguenti elementi.

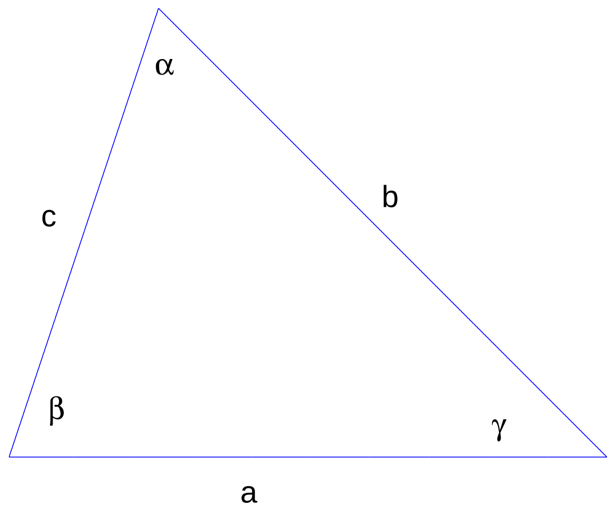


Figura I.46: Esercizio I.6.18i

i) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $b = \dfrac{13\sqrt{2}}{2}$, $\beta = \dfrac{\pi}{12}$;

ii) $a = 2,$, $b = 1 + \sqrt{3}$, $c = \sqrt{6}$;

iii) $a = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$;

iv) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $b = 5$, $c = 5\sqrt{3}$;

v) $a = 12$, $b = 12\sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

Soluzioni.

Risolvere un triangolo significa, dati 3 dei 6 elementi della figura, calcolare gli alri 3.

i)

È $\gamma = \pi - \frac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}$. Allora è

$$\operatorname{sen}(\gamma) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) .$$

Utilizzando le formule di bisezione, tenendo conto che tutti gli angoli si trovano nel primo quadrate, otteniamo che è

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} .$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} .$$

Negli ultimi passaggi abbiamo usato la formula del radicale doppio. Se $A^2 - B$ è un quadrato perfetto, allora è

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} .$$

La validità della formula si verifica elevando al quadrato ambo i membri.

Utilizziamo, ora, il teorema dei seni.

$$a = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} \cdot b = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} \left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{26}{\sqrt{3} - 1} .$$

$$c = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{sen}(\beta)} \cdot b = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} \left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{13(2 + \sqrt{3})\sqrt{2}}{2} .$$

ii)

Si usa il teorema di Carnot, per ottenere

$$\cos(\alpha) = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{(1+\sqrt{3})^2 + 6 - 4}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{1 + 3 + 2\sqrt{3} + 6 - 4}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} .$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4 + 6(1+\sqrt{3})^2}{4\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{10 - 1 - 3 - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}(} \cdot = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} .$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + (1+\sqrt{3})^2 - 6}{4(1+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{2} .$$

iii)

Usiamo il teorema dei sni. Calcoliamo il terzo angolo ed i rispettivi seni.

$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{7}{12}\pi .$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2} .$$

$$\operatorname{sen}(\gamma) = \operatorname{sen}\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} .$$

A questo punto possiamo calcolare gli altri due lati.

$$b = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha}) \cdot a = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 6 = 3\sqrt{2} .$$

$$c = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{sen}(\alpha}) \cdot a = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 6 = 3(\sqrt{3}+1) .$$

iv)

Il triangolo è rettangolo in A e sono dati i cateti. Calcoliamo l'ipotenusa, a, usando il teorema di PItagora.

$$a = \sqrt{25+75} = 10 .$$

Per trovare gli altri angoli usiamo il fatto che , in un triangolo rettangolo, un cateto è pari alla ipotenusa per il seno dell'angolo opposto. Questa proposizione non è altro che il teorema dei seni specializzato per un triangolo rettangolo.

Allora è

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \implies \beta = \frac{\pi}{6} .$$

$$\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \beta = \frac{\pi}{3} .$$

v)

Utilizziamo il teorema di Carnot per calcolar il lato c,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)\ ,$$

e cioè

$$144 = 2 \cdot 144 + c^2 - 24\sqrt{2}c\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Otteniamo una equazione di secondo grado in c.

$$c^2 - 24\sqrt{\frac{3}{2}}c + 144 = 0\ .$$

Usando la formula ridotta, le soluzioni sono

$$c = 12\sqrt{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{144 \cdot \frac{3}{2} - 144} = 12\sqrt{\frac{3}{2}} \pm 12\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} \pm 1)\ .$$

Otteniamo due soluzioni. Infatti non basta dare tre elementi di un triangolo per ottenere univocamente glialtri tre. I tre elementi vanno scelti opportunamente.

La figura I.47 di pagina 162 mostra, geometricamente, la non unicità della soluzione.

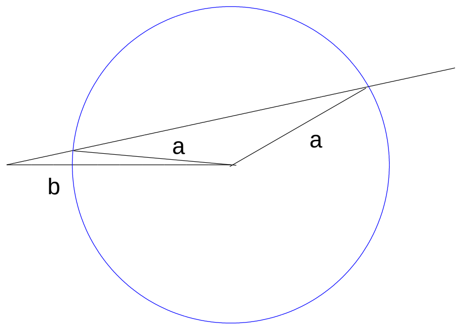


Figura I.47: Esercizio I.6.18v

Esercizi di riepilogo.

Esercizio I.6.19

È vero che è $\cos(2x) \leq 1 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$?

Soluzione.

La risposta è affermativa. Il coseno di qualsiasi numero reale non può superare 1.

Esercizio I.6.20

È vero che è $\cos(x) + 2\text{sen}(x) \leq 4 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$?

La risposta è affermativa. Il coseno ed il seno di qualsiasi numero reale non possono superare 1. Quindi è

$$\cos(x) + 2\text{sen}(x) \leq 3 \leq 4$$

Lo studente non si sconvolga a leggere che è $3 \leq 4$. Il simbolo $\leq$ significa " minore od uguale", quindi è anche vero che $1 \leq 1.000.000$.

Esercizio I.6.21

Determinare le soluzioni reali e distinte contenute nell'intervallo $[0, 2\pi]$ delle seguenti equazioni.

i) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ii) $\text{sen}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

iii) $\text{sen}(x) = 0$.

i)

Deve essere $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Siccome vogliamo le soluzioni in $[0, 2\pi]$, Con il segno + occorre prende re $k=0$, con il segno $-$, occorre prendere $k=1$ Le soluzioni sono $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{11\pi}{6}$.

ii)

Deve essere $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ o $x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Unifichiamo le formule nell'unica formula

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi \, , \; k \in \mathbb{Z} \, .$$

Otteniamo valori in $[0, 2\pi]$ scegliendo $k=1$ e $k=2$. Otteniamo le soluzioni

$$x = \frac{4}{3}\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{5}{3} \, .$$

iii)

Deve essere $x = k\pi$. Quindi le soluzioni cercate sono 3: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Esercizio I.6.22

$$\cos(x) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2} \;\;\Longrightarrow\;\; \mathrm{sen}(x) = ?$$

Soluzione.

$$\mathrm{sen}(x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x)} = \pm\frac{1}{2}\,.$$

Esercizio I.6.23

$$\mathrm{sen}(x) \;=\; -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\;\Longrightarrow\;\; \cos(x) = ?$$

Soluzione.

$$\mathrm{sen}(x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x)} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Esercizio I.6.24

$$\mathrm{sen}(x) \;=\; 0 \;\;\Longrightarrow\;\; \cos(x) = ?$$

Soluzione.

$$\mathrm{sen}(x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x)} = \pm 1\,.$$

Esercizio I.6.25

Determinare il numero di soluzioni reali e distinte, contenute nell'intervallo $[0, 2\pi]$, dell'equazione

$$\cos(2x) + \mathrm{sen}(x) \;=\; 0\,.$$

Ricordiamo che è $\cos^2(2x) = \cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x) = 1 - 2\mathrm{sen}^2(x)$. Sostituendo, otteniamo l'equazione

$$2\mathrm{sen}^2(x) - \mathrm{sen}(x) - 1 \;=\; 0\,.$$

Le soluzioni sono

$$\mathrm{sen}(x) \;=\; \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \;=\; \frac{1 \pm 3}{4}$$

La soluzione $sen(x) = 1$ fornisce la soluzione $x = \frac{\pi}{2}$. La soluzione $\mathrm{sen}(x) = -\frac{1}{2}$ fornisce le soluzioni $x = (-1)^k \frac{\pi}{6}$. Nell'intervallo assegnato cadono le soluzioni

$$x \;=\; \frac{5}{6}\pi \quad \text{e} \quad x \;=\; \frac{11}{6}\pi\,.$$

Esercizio I.6.26

Risolvere le seguenti equazioni.

i) $\dfrac{1}{\mathrm{sen}(x)} = 0$;

ii) $\dfrac{2\mathrm{sen}(x)}{x} = 0$;

iii) $\mathrm{sen}^2(x) + 2\mathrm{sen}(x) + 1 = 0$;

iv) $\mathrm{sen}(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$;

Soluzioni.

i)

L'equazione non ha soluzioni. Il numeatore della frazione è un numero , quindi, non è nullo per alcun valore di x.

ii)

Le soluzioni della equazione sono quelle dell'equazione $\operatorname{sen}(x)=0$ eccetto la soluzione $x=0$.

Le soluzioni sono, quindi, $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

iii)

L'equazione si può scrivere come

$$\Big(\operatorname{sen}(x)+1\Big)^2=0 \iff sen(x)=-1 \iff x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Esercizio I.6.27

Esiste un triangolo con i lati di lunghezza 10, 12, 25?

Soluzione.

Ricordiamo che, in qualsiasi triangolo, un lato deve essere minore od uguale alla somma degli altri due, e deve essere maggiore od uguale al valore assoluto della differenza.

Nel nostro caso è $25-12=13>10$. Il triangolo richiesto non esiste.

Esercizio I.6.28

Dato un triangolo ABC, con $\overline{AB}=5$, $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{2}$ e $\widehat{BCA}=\frac{\pi}{2}$, determinare la lunghezza dei lati $\overline{BC}$ ed $\overline{AC}$.

Soluzione.

Si tratta di un triangolo rettangolo in A. L'angolo opposto al cateto lungo 5 è il complpementare di $\frac{\pi}{3}$, vale, quindi, $\frac{\pi}{6}$. L'altro cateto

$$\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \text{tang}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \cdot \sqrt{3}\,.$$

L'ipotenusa vale

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Esercizio I.6.29

$\text{sen}(x) = 0$, e $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, implica che $\cos(x) = ?$

Soluzione.

Deve essere $x = k\pi\ , \in XZZ$. L'unica soluzione che cade nell'intervallo richisto è $x = \pi$, quindi è $\cos(x) = -1$.

Esercizio I.6.30

Se è $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, quanto vale x?

Soluzione.

La soluzione generale della equazione è

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

L'unica soluzione che cade nell'intervallo richiesto è

$$x\ =\ \frac{\pi}{6}\,.$$

Esercizio I.6.31

Dimostare che, se i lati di un triangolo misurano

$$a^2 + a + 1 \quad , \quad 2a + 1 \quad , \quad a^2 - 1\,,$$

allora un angolo del triangolo misura $\frac{2}{3}\pi$.

Soluzione.

L'angolo è ottuso, quindi il lato opposto deve essere il più grande dei tre dati. Poiché deve essere $a^2 - 1 > 0$, dovrà essere $a > 1$, quindi sarà $a^2 > a$. Di conseguenza sarà $a^2 + a + 1 > 2a = 1$. Mediante il teorema di Carnot calcoliamo il coseno dell'angolo opposto α.

$$\cos(\alpha) = \frac{(2a+1)^2 + (a^2-1)^2 - (a^2+a+1)^2}{2(2a+1)(a^2-1)} =$$

$$= \frac{4a^2 + 4a + 1 + a^4 - 2a^2 + 1 - a^4 - a^2 - 1 - 2a^3 - 2a^2 - 2a}{2(2a^3 + a^2 - 2a - 1)} =$$

$$\frac{-2a^3 - a^2 + 2a + 1}{2(2a^3 + a^2 - 2a - 1)} = -\frac{1}{2}\,.$$

Il risultato non dipende da a e $-\frac{1}{2}$ è proprio il coseno di $\frac{2}{3}\pi$.

Esercizio I.6.32

Due cerchi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ hanno lo stesso raggio, $r = 1$, ed il centro di uno si trova sul bordo dell'altro cerchio. Determinare la misura dell'intersezione $\mathcal{C} \bigcap \mathcal{C}'$.

Soluzione

Con riferimneto alla figura I.48 di pagina 169. Notiamo che il triangolo ABC è un triangolo equilatero, indichiamo con T la sua area. È

$$T = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

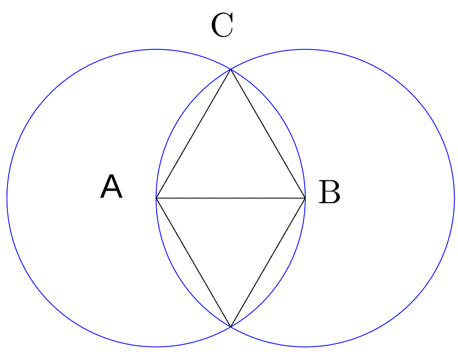


Figura I.48: Esercizio I.6.32i

Indichiamo con S l'area di ciascuno dei 4 segmenti di cerchio che compaiono nella figura. L'area cercata, G, vale $2T + 4S$.

Osserviamo che l'unione del triangolo ABC e di un segmento di cerchio adiacente costituisce un settore circolare il cui angolo al centro vale $\frac{\pi}{3}$. La sua area vale, quindi, un sesto di quella del cerchio. Quindi è

$$T + S = \frac{\pi}{6}$$

L'area cercata vale

$$G = 2T + 4S = 2T + \frac{4}{6}\pi - 4T = \frac{2}{3}\pi - 2T = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

I.7 Disequazioni

Esercizio I.7.1

Risolvere le seguenti disequazioni:

i) $-3x + 5 > 1$;

ii) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} \geq 2(a+b)$;

iii) $\dfrac{a-x}{b} - \dfrac{b-x}{a} \leq 0$.

Soluzioni.

Per risolvere questi esercizi basta fare attenzione al segno dei fattori moltiplicativi che si spostano da un membro all'altro.

i)

Semplicemente deve esssere

$$3x < 5 + 1 = 6 \implies x < 2$$

ii)

La disequazione si scrive

$$\frac{(a+b)}{ab} x \geq 2(a+b) .$$

Nota che sia a che b devono essere $\neq 0$. Inoltre se è $a + b = 0$ allora la disuguaglianza è soddisfatta per ogni$x$. Altrimenti se è

$$\frac{(a+b)}{ab} > 0 \text{ allora deve essere } x > 2ab .$$

Se è

$$\frac{(a+b)}{ab} < 0 \;\text{ allora deve essere }\; x < 2ab\,.$$

iii)

Manipoliamo elementarmente la forma della disequazione, tenendo conto che a e b deveno essere entrambi diversi da 0. .

$$\frac{a-x}{b} - \frac{b-x}{a} \;=\; \frac{a^2-ax-b^2+bx}{ab} \;=\; \frac{(a^2-b^2)-(a-b)x}{ab} \;=$$

$$=\; \frac{a-b}{ab}(a+b-x)\,.$$

La disequazione da studiare diviene la seguente

$$\frac{a-b}{ab}(a+b-x) \le 0\,.$$

Se è $a-b=0$, allora la disequazione è soddisfatta per ogni valore di x. Altrimenti se è

$$\frac{(a-b)}{ab} > 0 \;\text{ allora deve essere }\; x > a+b\,.$$

Se è

$$\frac{(a-b)}{ab} < 0 \;\text{ allora deve essere }\; x < a+b\,.$$

Esercizio I.7.2

Risolvere le seguenti disequazioni (essendo $a \in \mathbb{R}$).

i) $x^2 - 2x + 1 > 0$;

ii) $-x^2 + 2x + 1 > 0$;

iii) $ax^2 + (a-1)x - 1 > 0$;

iv) $|x^2 - 2| > 3$;

v) $x^2 - 2x + 1 > 0$;

vi) $|x^2 - 3| = 4 > 0$;

vii) $\begin{cases} x^2 - 8x - 20 < 0 \,, \\ 5x - 1 > 2x - 2 \,; \end{cases}$

viii) $\begin{cases} ax^2 > ax \,, \\ x^2 > a \,; \end{cases}$

Soluzioni.

i)

La disequazione si scrive

$$(x-1)^2 > 0 \iff x \neq 0 \,.$$

ii)

La disequazione è soddisfatta all'interno delle radici reali e distinte della equazione $x^2 - 2x - 1 = 0$. Le radici sono

$$x \;=\; 1 \pm \sqrt{1+1} \;=\; 1 \pm \sqrt{2}$$

La disequazione è soddisfatta per

$$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}\,.$$

iii)

Troviamo le radici della equazione. Se è $a=0$, la disequazione diviene $-x-1>o$, soddisfatta per $x<-1$.

Se è $a\neq 0$, allora le radici sono

$$\frac{1-a\pm\sqrt{a^2-2a+1-4a}}{2a}=\frac{1-a\pm\sqrt{(a+1)^2}}{2a}=$$

$$=\frac{1-a\pm|a+1|}{2a}=\begin{array}{l}\nearrow\ \dfrac{1-a+a+1}{2a}=\dfrac{1}{a}\\ \searrow\ \dfrac{1-a-a-1}{2a}=-1\end{array}$$

Se è $a>0$, allora è $-1<\dfrac{1}{a}$ e la disequazione è soddisfatta all'esterno dell'intervallo $[-1,\frac{1}{a}]$.

$$x<-1\quad\text{o}\quad x>\frac{1}{a}\,.$$

Se è $a<0$, bisogna distinguere i valori per cui $\frac{1}{a}$ è maggiore, uguale o minore di -1.

$$\frac{1}{a}<-1\iff 1>-a\iff -1<a\,.$$

Quindi, se è $-1<a<0$, allora la disequazione è soddisfatta per

$$\frac{1}{a}<x<-1\,.$$

Se è $a = -1$, la disequazione si riduce alla seguente

$$-x^2 - 1 < 0\,.$$

Questa disequazione no è soddisfatta per nessun x. Se è $a < -1$, allora è $\frac{1}{a} > -1$ e la disequazione è soddisfatta per

$$-1 < x < \frac{1}{a}\,.$$

iv)

Calcoliamo il discriminante del polinomio di secondo grado. È

$$\Delta = a^2 - 4(a - 10^2 = -3a^2 + 8a - 4\,.$$

Gli zeri di Δ sono per

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} \begin{array}{l} \nearrow \quad 2 \\ \searrow \quad \frac{2}{3} \end{array}\,.$$

Allora, se è $a < \frac{2}{3}$ oppure $a > 2$, il discriminante è negativo e, quindi, il trinomim ha sempre il segno del coefficiente di x^2. La disequazione è soddisfatta per ogni $x \in XRR$.

Se è $a = 2$ oppure $a = \frac{2}{3}$, il discriminante è nullo. Il trinomio ha una sola radice di molteplicità 2 che vale $x = -\frac{a}{3}$ e si scompone come

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^2\,.$$

La disuguaglianza ec soddisfatta per $x \neq -\frac{a}{3}$. Quindi per $a = 2$, la disuguaglianza è soddisfatta per $x \neq -1$. Per $a = \frac{2}{3}$, la disuguaglianza è soddisfatta per $x \neq -\frac{1}{3}$.

Se è $\frac{2}{3} < x < 2$, la disuguaglianza è soddisfatta all'esterno dell'intervallo delle radici che sono

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{-3a^2 + 8a - 4}}{2} \, .$$

La disuguaglianza è soddisfatta per

$$\frac{-a - \sqrt{-3a^2 + 8a - 4}}{2} < x < \frac{-a + \sqrt{-3a^2 + 8a - 4}}{2}$$

v)

Deve essere

$$-3 < x^2 - 2 < 3 \, ,$$

Si tratta del seguente sitema di disequazioni.

$$\begin{cases} x^2 - 5 < 0 \, , \\ x^1 + 1 > 0 \, . \end{cases}$$

La seconda disequazione è soddisffatta per ogni valore di x. Restano le soluzioni della prima.

$$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \, .$$

vi)

Deve essere

$$|x^2 - 3x| > 4 \iff x^2 - 3x > 4 \text{ oppure } x^2 - 3x < -4 \, .$$

Otteniamo la seguente coppia di disequazioni.

$$x^2 - 3x - 4 > 0 \text{ oppure } x^2 - 3x + 4 < 0\,.$$

Il discriminante del primo trinomio vale $\Delta = 9 + 16 = 25$, il discriminante del secondo trinomio vale $\Delta = 9 - 16 < 0$.

Allora la senconda disequazione non ha soluzioni perché il trinomio è positivo per ogni valore di x. La disequazione è soddisfatta all'esterno delle radici del primo trinomio che sono

$$x = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad 4 \\ \searrow \quad -1 \end{array}\,.$$

La disequazione è soddisfatta per

$$x < -1 \quad \text{e} \quad x > 4\,.$$

vii)

Si tratta di un sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 8x - 20 < 0\,, \\ 3x + 1 > 0\,. \end{cases}$$

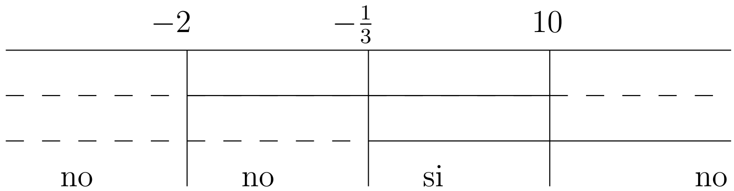
Risolviamo le singole disequazioni. Le radici del trinomio di secondo grado sono

$$4 \pm \sqrt{16 + 20} = 4 \pm 6 \begin{array}{l} \nearrow \quad 10 \\ \searrow \quad -2 \end{array}\,.$$

La radice del polinomio di primo grado è $= \frac{1}{3}$.

Ci sono sul mercato molti modi per assemblare i risultati. Ne presentiamo uno. Si tracciano tanti assi cartesiani paralleli quante sono le disequazioni più 1. Sul primo si segnano tutti i numeri in cui qualche pezzo cambia segno. Da ciascuno di questi punti si traccia una linea verticale che interseca tutti gli assi.

Ciascuno degli assi relativo ad una disequazione del sistema si disegna a tratto intero negli intervalli in cui la relativa disequazione è soddisfatta ed a linea tratteggiata negli intervalli in cui la disequazione non è soddisfatta. Il sisterma è soddisfatto negli intevalli in cui compaiono tutte linee intere. La cosa è molto più facile a farsi che a raccontarsi in teoria.



Il sistema è soddisfatto per

$$-\frac{1}{3} < x < 10\,.$$

viii)

Il sistema si scrive

$$\begin{cases} ax^2 - ax > 0\,, \\ x^2 - a > 0\,. \end{cases}$$

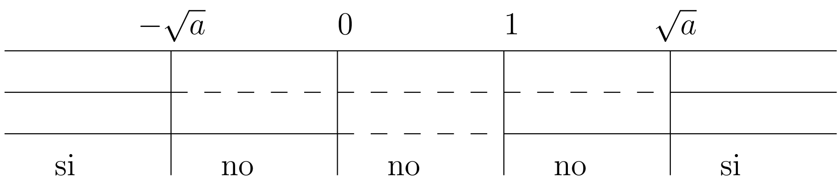
Se è $a = 0$, non ci sono soluzioni perché il primo membro della prima equzione vale costantemente 0. Se è $a > 0$, il sistema diviene

$$\begin{cases} x^2 - x > 0\,, \\ x^2 - |a| > 0\,. \end{cases}$$

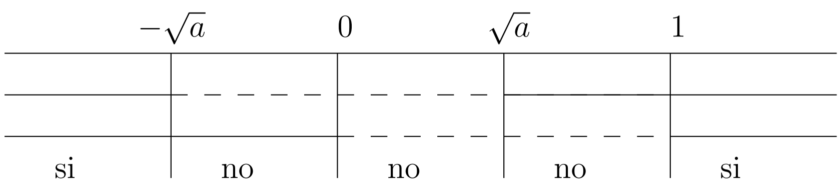
Se è $a < 0$, il sistema diviene

$$\begin{cases} x^2 - x < 0\,, \\ x^2 + |a| > 0\,. \end{cases}$$

Studiamo il primo sistema. Le redici del primo trinomio di secondo grado sono 0 e 1. Le radici del secondo trinomio di secondo grado sono $\pm\sqrt{a}$. Ambedue le disequazioni sono soddisfatte all'esterno dell'intervallo delle radici. Se è $a > 1$ lo schema del sistema è il seguente.



Se è $0 < a < 1$ Lo schema è simile con il solo scambio della reciproca posizione di 1 e $\sqrt{a}$.



Se è $a = 1$, allora è $\sqrt{a} = 1$. Lo schema resta sostanzialmemte lo stesso eliminando la colonna fra 1 e $\sqrt{a}$. In definitiva il sistema, se è $a > 0$ è soddisfatto per $x < -\sqrt{a}$ e per $x < max(1, \sqrt{a})$.

Nel caso $a < 0$. la seconda disequazione è sempre soddisfatta, quindi le soluzioni del sistema sono quelle della prima disequazione. Precisamente $0 < x < 1$.

Esercizio I.7.3

Risolvere le seguenti disequazioni.

i) $\dfrac{x-1}{x+1} > 1$;

ii) $\dfrac{x-1}{x^2-1} > \dfrac{x}{x-1}$;

iii) $\dfrac{x-3}{ax+1} < 0$ con $a \in \mathbb{R}$;

iv) $\dfrac{5x^3+x^2-20x-4}{4x^3+12x^2-9x-27} > 0$;

v) $\left|x - \frac{1}{x} - 2\right| \geq 1$;

vi) $\left|\dfrac{x^2-1}{x}\right| < 2x$.

Come sempre non c'è una unica via che si può percorrere. Per non appesantire il testo ne useremo una sola. Le due vie maggiormente usate sono: fare sparire i denominatori tenendo conto dei segni dei fattori che si spostano da un membro ad un altro; portare tutto ad un unico membro e ridurre il tutto ad una unica frazione, poi si discute il segno della frazione studiando separatamente il segno del numeratore ed il segno del denominatore. Seguiremo questa seconda via.

Soluzioni.

i)

Portiamo tutto a primo membro.

$$\frac{x-1}{x+1} - 1 > 0 \iff \frac{x-1-x-1}{x+1} > 0 \iff \frac{-2}{x+1} > 0 \iff$$
$$\iff x+1 < 0 \iff x < -1\,.$$

ii)

Portiamo tutto a primo membro. Terremo conto che la disequazione ha senso solo per $x \neq pm1$.

$$\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} > 0 \iff \frac{x-1-x(x+1)}{x^2-1} > 0 \iff$$
$$\iff \frac{-x^2+2x-1}{x^2-1} > 0 \iff \frac{-(x-1)^2}{x^2-1} > 0 \iff$$
$$\iff x^2-1 < 0 \iff -1 < x < +1\,.$$

iii)

Occorre distinguere i tre casi $a > 0$, $a{=}0$, $a < 0$.

Se è $a = 0$, la disequazione si riduce alla seguente $x - 3 < 0$, soddisfatta per $x < 3$. Sia $a > 0$, studiamo il segno del numeratore e del denominatore.

$$x-3 > 0 \iff x > 3 \quad , \quad ax_1 > 0 \iff x > -\frac{1}{a}\,.$$

Spostando il fattore a da un membro all'altro, abbiamo tenuto conto del fatto che è $a > 0$. Riuniamo i risultati mettendoli in uno schema simile a quello dei sitemi di disequazioni. Ci vuole meno tempo a leggere e capire la figura che a spiegare teoricamente come si costruisce lo schema.

$-\frac{1}{a}$		3		
$-$	$-$	$+$	$x-3$
$-$	$+$	$+$	$ax+1$
$+$	$-$	$+$	segno finale

Dallo schema si vede chiaramente che il segno finale è negativo, quindi la disequazione è soddisfatta, nell'intervallo

$$\left(-\frac{1}{a}, 3\right) \, .$$

Nel caso sia $a < 0$, occcorre distinguere i tre casi

$$0 < -\frac{1}{a} < 3 \quad , \quad -\frac{1}{a} = 3 \quad , \quad -\frac{1}{a} > 3 \, .$$

Nel secondo caso, la disequazione diviene

$$-\frac{3(x-3)}{x-3} < 0 \, .$$

Lo studente resista alla tentazione di semplificare e concludere che la disequazione è soddisffatta per ogni $x \in \mathbb{R}$: sbaglierebbe!. La disequazione è soddisfatta per tutti gli x per cui la frazione esiste: quindi per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Negli altri due casi abbiamo che è

$$x-3>0 \iff x>3 \quad , \quad ax_1 > 0 \iff x < -\frac{1}{a} \, .$$

I due schemi seguenti mostrano come si combinano i segni nei due casi.

$-\infty$ ... $-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$ ... 3	3 ... $+\infty$	
$-$	$-$	$+$	$x-3$
$+$	$-$	$-$	$ax+1$
$-$	$+$	$-$	segno finale

$-\infty$ ... 3	3 ... $-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$ ... $+\infty$	
$-$	$+$	$+$	$x-3$
$+$	$+$	$-$	$ax+1$
$-$	$+$	$-$	segno finale

In ambedue i casi la disequazione è soddisfatta nel primo e nel terzo intervallo. Se indichiamo con

$$\alpha = min\left(-\frac{1}{a}, 3\right) \quad \text{e} \quad \beta = max\left(-\frac{1}{a}, 3\right) \quad ,$$

la disequazione è soddisfatta per $x < \alpha$ e per $x > \beta$.

iv)

Per studiare il segno del numeratore e del denominatore è utile riuscire a scomporre i polinomi di terzo grado che li esprimono. Con la regola empirica esposta nel capitolo dei polinomi (le ventuali radici razionali di un polinomio a coefficienti interi hanno a numeratore un divisore del termine noto e a denominatore un divisore del termine di massima potenza), si torva che una radice del numeratore è $x=-\frac{1}{5}$ ed una radice del denominatore è $x=-3$. Quindi il numeratore è divisibile per $5x+1$ ed i ldenominatore è divisibile per $x+3$. Potremm, ora, eseguire le divisioni, ma è più breve proseguire empiricamente.

Fra i primi due addendi del numeratore mettiamo in evidenza il fattore x^2, fra i restanti due, mettiamo in evidenza il fattore -4. Otteniamo la scomposizione

$$5x^3 + x^2 - 20x - 4 = x^2(5x+1) - 4(5x+1) = (5x+1)(x^2-4)\ .$$

Fra i primi due addendi del denominatore mettiamo in evidenza il fattore $4x^2$, fra i restanti due, mettiamo in evidenza il fattore -9. Otteniamo la scomposizione

$$4x^3 + 12x^2 - 9x - 27 = 4x^2(x+3) - 9(x+3) = (x+3)(4x^2-9)\ .$$

la disequazione diventa

$$\frac{(5x+1)(x^2-4)}{(x+3)(4x^2-9)} > 0\ .$$

Studieremo il segno dei quattro fattori e poi metteremo insieme i risultati in uno schema simile ai precedenti. Nota che i valori che annullano i singoli fattori vanno esclusi sia perché la disuguaglianza è stretta sia perché alcuni fattori si trovano al denominatore.

$$5x+1>0 \iff x > -\frac{1}{5}\ .$$

$$x^2-4>0 \iff x<-2\ [\text{oppure}\ x>2\ .$$

$$x + 3 > 0 \iff x > -3\,.$$

$$4x^2 - 9 > 0 \iff x < -\frac{3}{2} \text{ oppure } x > \frac{3}{2}\,.$$

mettiamo in ordine crescente i vari numeri coinvolti.

$$-3 \quad , \quad -2 \quad , \quad -\frac{3}{2} \quad , \quad -\frac{1}{5} \quad , \quad \frac{3}{2} \quad , \quad 2\,.$$

Costruiamo lo schema dei segni.

	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	2	
$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$5x+1$
$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	x^2-4
$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x+3$
$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$4x^2-9$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	segno finale

La disuguaglianz aè soddisfatta dove c'è il segno $+$ nella ultima riga. L'insieme delle soluzioni è

$$(-\infty, -3) \cup \left(-2, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty)\,.$$

v)

Fra le molte vie possibili, ne seguiremo una che ci sembra sufficientemente semplice. Riduciamo ad una unica frazione l'argomento del valore assoluto. Otteniamo la disequazione

$$\left|\frac{x^2 - 2x - 4}{x}\right| \geq 1\,.$$

Potremmo elevare al quadrato ambo i membri per far sparire il valore assoluto (ricorda che è $|x|^2 = x^2$). Ma operando così otterremmo un numeratore di quarto grado difficilmente riducibile (anche se si riesce a scomporlo).

Le soluzioni della disequazione assegnata sono sia le soluzioni della disequazione

$$(A) \qquad \frac{x^2-2x-4}{x} \geq 1\,,$$

che quelle della disequazione

$$(B) \qquad \frac{x^2-2x-4}{x} \leq -1\,.$$

Tutti i fattori di cui occorre studiare il segno sono, al più, di secondo grado. Risolviamo la disequazione (A).

$$\frac{x^2-2x-4}{x} - 1 \geq 0 \iff \frac{x^2-3x-4}{x} \geq 0$$

Il numeratore è positivo all'esterno dell'intervallo delle eventuali radici reali. Esse sono

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow \quad 4 \\ \searrow \quad -1 \end{array} .$$

Lo schema per ottenere il segno della frazione è il seguente

-1		0		4	
$+$	$-$	$-$	$+$	x^2-3x-4
$-$	$-$	$+$	$+$	x
$-$	$+$	$-$	$+$	segno finale

La disequazione (A) è soddisfatta in $[-1,0) \cup [4,+\infty)$. Risolviamo la disequazione (B).

$$\frac{x^2-2x-4}{x}+1 \leq 0 \iff \frac{x^2-x-4}{x} \geq 0$$

Il numeratore è positivo all'esterno dell'intervallo delle eventuali radici reali. Esse sono

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ \searrow \frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{array} .$$

Lo schema per ottenere il segno della frazione è il seguente

$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$	
$+$	$-$	$-$	$+$	x^2-x-4
$-$	$-$	$+$	$+$	x
$-$	$+$	$-$	$+$	segno finale

La disequazione (B) è soddisfatta in $\left(\left[-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right]\right.$.

Per scrivere corrattemente l'unione dei due insiemi di soluzioni, dobbiamo mettere in ordine crescente gli estremi dei vari intervalli. È

$$0 < \frac{1+\sqrt{17}}{2} \frac{1+5}{2} = 6 .$$

Confrontiamo $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ con -1. È

$$\frac{1-\sqrt{17}}{2} \mathrel{\substack{> \\ <}} -1 \iff 1-\sqrt{17} \mathrel{\substack{> \\ <}} -2 \iff 3 \mathrel{\substack{> \\ <}} \sqrt{17} .$$

All'ultimo membro vale la disuguaglianza inferiore, quindi, anche al primo membro vale la disuguaglianza inferiore.

L'insieme delle soluzioni della disuguaglianza di partenza è

$$\left([-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup [-1,0) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right] \cup [4,+\infty)\,.$$

vi)

Prima di imbarcarci in una più o meno sofisticata analisi del segno dell'argomento del valore assoluto, facciamo alcune considerazioni preliminare che ci semplificano la vita.

Anzitutto, affinché la disequazione abbia senso, deve essere $x \neq 0$. Poi gli $x < 0$ non possono soddisfare la disuguaglianza perché , per tali x, il primo membro è positivo ed il secondo membro è negativo. Un numero positivo non può essere minore di un numero negativo. Allora possiamo toglier il modulo al denominatore e scrivere la disequazione come segue

$$\left\{ \, |x^2-1| < 2x^2 \,, x > 0 \,. \right.$$

Un modo equivalente di scrivere il sistema è il seguente

$$\left\{ \, -2x^2 < x^2-1 < 2x^2 \,, x > 0 \,. \right.$$

La disuguaglianza di destra è sempre soddisfatta. Le soluzioni della disuguaglianza di partenza sono tutte, e sole, quelle del seguente sistema

$$\left\{ \, -2x^2 < x^2-1 \,, x > 0 \,. \right.$$

La prima disequazione è

$$3x^2-1 > 0 \iff x >\text{: oppure } x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Tenendo conto che dobbiamo scartare soluzioni negative, otteniamo che la soluzione della disequaiozne di partenza è

$$x > \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Esercizio I.7.4

Risolvere le seguenti disequazioni.

i) $\sqrt[3]{1+3x-3x^2} > x-1$;

ii) $\sqrt[3]{x^3-x} > |x|$;

i) $\sqrt[3]{2x-12} < 1$;

iv) $\sqrt[3]{x^3+2} > x-1$.

Soluzioni.

Non ci sono regole generali. È sempre lecito elevare ambo i membri di una disequazione ad un potenza dispari per ottenere una disequazione equivalente. Ciò perché la funzione $f(x) = x^3$ è un funzione biettiva e crescente. Quindi è

$$x_1 < x_2 \iff x_1^3 < x_2^3 .$$

i)

Elevando al cubo ambo i membri otteniamo la disequazione equivalente

$$1+3x-3x^2 > x^3-3x^2+3x-1 \iff x^3 < 1 \iff x < 1 .$$

ii)

Di nuovo eleviamo al cubo ambo i membri.

$$x^3 - x > |x|^3 \,.$$

Se è $x = 0$, la disequazione non è soddisfatta perché ambo i membri valgono 0. Se è $x > 0$, la disequazione diventa

$$x^3 - x > x^3 \iff x < 0 \,,$$

Mai soddisfatta nell'intervallo in esame. Se è $x < 0$, la disequazione diventa

$$x^3 - x > -x^3 \iff x(x^2 - 2) > 0 \,.$$

Il fattore $(x^2 - 2)$ è poositivo all'esterno dell'intervallo delle radici che sono $x = \pm\sqrt{2}$. Montiamo il solito schema del segno dei due fattori.

$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$		
$+$	$-$	$-$	$+$	$x^2 - 2$
$-$	$-$	$+$	$+$	x
$-$	$+$	$-$	$+$	segno finale

La disequazione è soddisfatta in $(-\sqrt{2}, 0)$.

iii)

Eleviamo al cubo ambo i membri ed otteniamo la disequazione

$$2x - 1 < 1 \iff x < 1 \,.$$

iv)

Eleviamo al cubo ambo i membri ed otteniamo la disequazione

$$x^3 + 2 > x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \iff 3x^2 - 3x + 3 > 0 \iff$$

$$\iff x^2 - x + 1 > 0 \,.$$

Il discriminante dell'ultimo trinomio di secondo grado bale

$$\Delta = 1 - 4 < 0 \,.$$

La disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio I.7.5

Risolvere le seguenti disequazioni.

i) $\sqrt{x-1} < 3$;

ii) $\sqrt{x-1} > x - 2$;

iii) $\sqrt{x-1} > \sqrt{4x^2 - 1}$;

iv) $4 + 2\sqrt{5x-4} \geq 5$;

v) $\sqrt{3x-8} - \sqrt{3x+3} > \sqrt{x+6}$;

vi) $3 - \sqrt{9-x} \leq 3$;

vii) $\sqrt{x(x-a)} > x - a$, $(a \in \mathbb{R})$;

viii) $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2} < \sqrt{x+6} + \sqrt{x-}$.

Questa volta son coinvolti radicali di indice pari. Può essere una buona abitudine trovare, prima, l'insieme in cui tutti i radicali coinvolti esistono. Poi, prima di elevare a potenza pari ambo i membri può essere utile fare una analisi dei segni dei due membri.

i)

Deve essere $x-1 \geq 0$, cioè $x \geq 1$. Per tali x eleviamo al quadrato ambo i membri ed otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x-1<9\,, \\ x \geq 1\,, \end{cases} \iff \begin{cases} x<10\,, \\ x \geq 1\,. \end{cases}$$

La disequazioneè soddisfatta in $[1, 10)$.

ii)

Deve essere $x-1 \geq 0$, cioè $x \geq 1$. Se il radicale esiste ed il secondo membro è negativo, la disuguaglianza è soddisfatta: ciò accade se è $x \leq 2$. La disuguaglianza è soddisfatta in $[1, 2]$. Per $x > 2$, eleviamo al quadrato ambo i membri, che sono entrambi positivi, ed otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x-1>x^2-4x+4\,, \\ x>2\,, \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-5x+5<0\,, \\ x>2\,. \end{cases}$$

Le radici del trinomio di secondo grado sono

$$\frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

La relativa disequazione è soddisfatta all'interno dell'intervallo delle radici.

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Poiché è

$$2 < \sqrt{5} < 3\,,$$

è, di conseguenza sia

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} > \frac{5+2}{2} > 2\,,$$

sia

$$-3 < -\sqrt{5} < -2 \iff 2 = 5-3 < 5-\sqrt{5} < 5-2 = 3 \iff$$

$$\iff 1 < \frac{5-\sqrt{5}}{2} < \frac{3}{2} < 2\,.$$

Il sistema è soddisfatto in

$$\left(2, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\,.$$

La disequazione è soddisfatta in

$$\left[1, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\,.$$

iii)

Affinché esistano ambedue i radicali, deve essere soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0\,, \\ 4x^2-1 \geq 0\,. \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1\,, \\ x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

L'intersezione dei due insiemi è $x \geq 1$. Soddisfatta questa condizione eleviamo al quadrato ambo i membri ed otteniamo il sistema equivalente alla disequazione:

$$\begin{cases} x - 1 > 4x^2 - 1 \,, \\ x \geq 1 \,. \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2 - x < 0 \,, \\ x \geq 1 \,. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{4} \,, \\ x \geq 1 \,. \end{cases}$$

Questo ultimo sistema è incompatibile. La disequazione non ha soluzioni.

iv)

Scriviamo la disequazione nella forma

$$2\sqrt{5 - 4x} \geq 5 - 4x \,.$$

Il radicale esiste se è

$$5 - 4x \geq 0 \iff x \leq \frac{5}{4} \,.$$

Per tali x il radicale esiste ed è positivo. Anche il secondo membro è positivo, quindi possiamo dividere ambo i membri per il radicale ed otteniamo la disequazione equivalente

$$2 \geq \sqrt{5 - 4x} \,.$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri, tenendo conto della condizione di esistenza del radicale. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 4 \geq 5 - 4x \,, \\ \\ x \leq \dfrac{5}{4} \,, \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{4} \,, \\ \\ x \leq \dfrac{5}{4} \,. \end{cases}$$

La disequazione è soddisfatta in

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right] .$$

v)

Deve essere

$$\begin{cases} 3x - 8 \geq 0 \, , \\ 5x + 3 \geq 0 \, , \\ x + 6 \geq 0 \, , \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{8}{3} \, , \\ x > -\frac{3}{5} \, , \\ x > -6 \, , \end{cases} \iff x > \frac{8}{3} \, .$$

Verifichiamo per quali valori ammissibili di x, il primo membro è positivo.

$$\sqrt{3x - 8} > \sqrt{5x + 3} \iff 3x - 8 > 5x + 3 \iff 3x < -11 \, .$$

L'ultima condizione è incompaibile con la condizione $x > \frac{8}{3}$. Il primo membro è sempre negativo, di conseguenza la disequazione non ha soluzioni perché un numero negativo non può essere maggioren di un numero positivo.

vi)

Scriviamo la disequazione come:

$$3x - 3 \leq \sqrt{9 - x} \, .$$

Per l'esistenza del radicale, deve essere $9 - x \geq 0$, cioè $x \leq 9$. Per tali x eleviamo al quadrato ambo i membri ed otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 9 - 18x + 9x^2 \leq 9 - x \, , \\ x \leq 9 \, . \end{cases} \iff \begin{cases} 9x^2 - 17x \leq 0 \, , \\ x \leq 9 \, . \end{cases}$$

Le radici del trinomio di secondo grado sono 0 e $\frac{17}{9}$. Il sistema diviene

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{17}{9}\,, \\ x \leq 9\,. \end{cases}$$

La disequazione è soddisfatta in

$$\left[0, \frac{17}{9}\right]\,,$$

perché è $\frac{17}{9} < 9$.

vii)

Se è $a=0$, la disequazione diventa;

$$\sqrt{x^2} > x \iff |x| > x \iff x > 0\,.$$

Se è $a > 0$, allora il radicale esiste per $x \leq 0$ o per $x \geq a$.

Se è $x \leq 0$, allora è $x-a < 0$ e la disuguaglianza è sempre soddisfatta.

Se è $x \geq a$, allora è $x - a \geq 0$ e possiamo elevare al qudrato ambo i membri ottenendo il sistema

$$\begin{cases} x(x-a) > (x-a)^2\,, \\ x \geq a\,. \end{cases} \iff \begin{cases} x > x-a\,, \\ x \geq a\,. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 0 > -a\,, \\ x \geq a\,. \end{cases} \iff \begin{cases} a > 0\,, \\ x \geq a\,. \end{cases}$$

In conclusione, per $a > 0$, la disequazione è soddisfatta per $x \leq 0$ e per $x > a$.

Se è $a < 0$, allora deve essere $x \leq a$ oppure $x \geq 0$. Se è $x \leq a$, allora è $x - a \leq 0$ e la disequazione è soddisfatta per tutti gli $x < a$.

Se è $x \geq 0$, allora è $x - a \geq 0$ e possiamo elevarw al quadrato ambo i membri. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x(x-a) > (x-a)^2 \,, \\ x \geq 0 \,, \\ a < 0 \,, \end{cases} \iff \begin{cases} x > x - a \,, \\ x \geq 0 \,, \\ a < 0 \,, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a > 0 \,, \\ x \geq 0 \,, \\ a < 0 \,. \end{cases}$$

L'ultimo sistema è incompatibile. In conclusione, per $a < 0$ la disequazione è sosddisfatta per $x < a$.

viii)

Per l'esistenza dei radicali deve essere

$$\begin{cases} x + 7 \geq 0 \,, \\ 6 - x \geq 0 \,, \\ 2x - 3 \geq 0 \,, \end{cases} \iff x \geq -7 \,, x \leq 6 \,, x \geq \frac{3}{2} \,.$$

Le tre condizioni si riducono alla seguente

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 6 \,.$$

vediamo per quali x compatibili, il primo membro è positivo.

$$\sqrt{x+7} \geq \sqrt{6-x} \iff x + 7 \geq 6 - x \iff 2x \geq -1 \,.$$

L'ultima condizione è soddisfatta nell'intervallo in esame. Possiamo elevare al quadrato ambo i membri. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x+7+6-x-2\sqrt{(x+7)6-x)} > 2x-3\,, \\ \frac{3}{2} \le x \le 6\,. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 16-2x > 2\sqrt{(x+7)6-x)}\,, \\ \frac{3}{2} \le x \le 6\,. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 8-x > \sqrt{(x+7)6-x)}\,, \\ \frac{3}{2} \le x \le 6\,. \end{cases}$$

Nell'intervallo in esame il primo membro è positivo, quindi possiamo, di nuovo, elevare al quadrato ambo i membri. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 64-16x+x^2 > -x^2-x+42\,, \\ \frac{3}{2} \le x \le 6\,. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2-15x+22 > 0\,, \\ \frac{3}{2} \le x \le 6\,. \end{cases}$$

Le radici del polinomio di secondo grado sono

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225-196}}{4} = \frac{15 \pm 7}{4} \begin{matrix} \nearrow & \frac{11}{2} \\ \searrow & 2 \end{matrix} \,.$$

Il sistem è soddisfatto per

$$\begin{cases} x < 2 \quad \text{o} \quad x > \frac{11}{2}\,, \\ \frac{3}{2} \le x \le 6\,. \end{cases}$$

Le soluzioni delle singole disequazioni sono rappresentate nel seguente schema.

	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{11}{2}$	6	
- - - - -	———	———	———	- - - - -	$2x^2 - 15x + 22 \leq 0$
———	———	- - - - -	———	———	$\frac{3}{2} \leq x \leq 6$
no	si	no	si	no	

La disequazione è soddisfatta in

$$\left[\frac{3}{2}, 2\right) \bigcup \left(\frac{11}{2}, 6\right] .$$

ix)

La condizione di esistenza dei radicali fornisce:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0\,, \\ x - 2 \geq 0\,, \\ x + 6 \geq 0\,, \\ x - 3 \geq 0\,. \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1\,, \\ x \geq 2\,, \\ x \geq -6\,, \\ x \geq 3\,. \end{cases} \iff x \geq 3\,.$$

A questo punto, essendo ambedue i membri della disequazione maggiori di 0, possiamo elevare al quadrato ambo i membri. La disequazione diviene

$$x + 1 + x - 2 + 2\sqrt{(x+1)(x-2)} <$$

$$< x + 6 + x - 3 + 2\sqrt{(x+6)(x-3)} \iff$$

$$\iff \sqrt{x^2 + 3x + 2} < 2 + \sqrt{x^2 + 3x - 18}\,.$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x + 2} < 2 + \sqrt{x^2 + 3x - 18}\,, \\ x \geq 3\,. \end{cases}$$

Tenuto conto della seconda equazione, ambo i membri della prima equazione esitono e sono positivi. Possiamo, di nuovo, elevare al quadrato ambo i membri. La prima disequazione diviene

$$x^2 + 3x + 2,4 + x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 18} \iff$$

$$\iff \quad 4 < \sqrt{x^2 + 3x - 18}\,.$$

Il sistema diviene

$$\begin{cases} 4 < \sqrt{x^2 + 3x - 18}\,, \\ x \geq 3\,. \end{cases}$$

Nella prima disequazione possiamo ancora elevare al quadrato ambo i membri. otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 16 < x^2 + 3x - 18\,, \\ x \geq 3\,. \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 3x - 34 > 0\,, \\ x \geq 3\,. \end{cases}$$

Le radici del polinomio di secondo grado sono

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 136}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{235}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad \dfrac{3 + \sqrt{235}}{2} \\ \searrow \quad \dfrac{3 - \sqrt{235}}{2}\,. \end{array}$$

La prima disequazione è soddisfatta all'esterno dell'intervallo delle radici. La radice più piccola , x_1, è negativa, quindi lacondizione $x < x_1$ è incompatibile con la seconda equazione del sitema. La radice maggiore x_2, è maggiore di 3. Infatti è

$$\frac{3 + \sqrt{235}}{2} > \frac{3 + 15}{2} = 9.3\,.$$

La disequazione iniziale è soddisfatta per

$$x > \frac{3+\sqrt{235}}{2}\ .$$

Esercizio I.7.6

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali.

i) $\dfrac{3^{x+1}+3^{2-x}-4}{3^x} < \dfrac{8}{3}$;

ii) $2^{\frac{9}{x}} - 2^x < 0$;

iii) $e^x + e^{-x} < -\dfrac{3}{2}$;

iv) $2^{\frac{x+1}{x-1}} > 1$.

Soluzioni.

i)

Si pone $3^x = t$, sarà certamente $t > 0$. Si ottiene l'equazione

$$\frac{3t+9\frac{1}{t}-4}{7} < \frac{8}{3} \iff \frac{3t^2-4t+9}{t^2} < \frac{8}{3}\ .$$

Poiché è certamente $t^2 > 0$, la disequazione diviene

$$9t^2 - 12t + 27 < 8t^2 \iff t^2 - 12t + 27 < 0\ .$$

Le radici dl trinomio di secondo grado sono

$$t \;=\; 6 \pm \sqrt{36-27} \;=\; 6 \pm \sqrt{9} \;=\; 6 \pm 3 \;=\; \begin{matrix} \nearrow & 9 \\ & \\ \searrow & 3 \end{matrix}\ .$$

Nella variabile t, la disequazione è soddisfatta per

$$3 < t < 9\,.$$

Passando alla variabile x, otteniamo le disequazioni

$$3 < 3^x < 9\,,$$

che possiamo scrivere come

$$3^1 < 3^x < 3^2\,.$$

Queste sono soddisfatte se è

$$1 < x, 2\,,$$

Perché 3^x è una funzione crescente.

ii)

Scriviamo la disequazione come

$$2^{\frac{9}{x}} < 2^x \iff \frac{9}{x} < x \iff \frac{9-x^2}{x} < 0\,.$$

È $9 - x^2 > 0$ in $(-3, 3)$. Lo scema del segno della frazione è mostrato nella seguente tabella.

$-\infty$ … -3	-3 … 0	0 … 3	3 … $+\infty$	
$-$	$+$	$+$	$-$	$9 - x^2$
$-$	$-$	$+$	$+$	x
$+$	$-$	$+$	$-$	segno finale

La disequazione è sodisfatta in $(-3,0)\cup(3,+\infty)$.

iii)

Il primo membro è positivo per ogni x, il secondo membro è negativo, quindi la disequazione non ha soluzioni.

iv)

scriviamo la disequazione come

$$e^{\frac{x+1}{x-1}} > 2^0 \,.$$

Poiché la funzione 2^x è crescente, la disequazione è equivalente alla seguente

$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \,.$$

La regola dei segni del quoziente è la stessa di quella del prodotto, quindi la frazione è positiva all'esterno dell'intervallo delle radici che sono ± 1. La disequazione è soddisfatta per $x < -1$ e per $x > 1$.

Esercizio I.7.7

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche.

i) $\log(x^2 - x - 1) > 0$;

ii) $\log((x+4)^2) > \log(3x+10)$;

iii) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{2x+x^2}\right) > 1$;

iv) $\log_a(1 + 2x - x^2) > 2$;

v) $\log^3(x^3 - 8) > 0$;

vi) $\log^2(x^2) \geq \log^4(x^6)$;

Soluzioni.

i)

Deve essere

$$x^2 - x - 1 > 1 \iff x^2 - x - 2 > 0$$

Le radici sono

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad 2 \\ \searrow \quad -1 \end{array} .$$

La disequazione è soddisfatta all'esterno dell'intervallo delle radici, quindi per $x < -1$ e per $x > 2$.

ii)

Deve essere

$$(x+4)^2 > 3x + 10 \iff x^2 + 8x + 16 > 3x + 10 \iff$$

$$\iff x^2 + 5x + 6 > 0 .$$

Le radici dell'ultimo trinomio sono

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \begin{array}{l} \nearrow \quad -3 \\ \searrow \quad -2 \end{array} .$$

La disequazione è soddisfatta all'esterno dell'intervallo delle radici, quindi per $x < -3$ e per $x > -2$.

iii)

Poiché è $\frac{1}{3}, 1$, il logaritmo è decrescente, quindi deve essere

$$0 < \frac{2}{2x + x^2} < \frac{1}{3} \,.$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + x^2 > 0 \,, \\ 6 < 2x + x^2 \,. \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta all'esterno dell'intervallo $[-2, 0]$. La seconda è soddisfatta all'esterno dell'intervallo delle radici del trinomio $x^2 + 2x - 6$. tali radici sono

$$x \;=\; -1 \pm \sqrt{1+6} \;=\; -1 \pm \sqrt{7} \,.$$

Poiché è

$$\sqrt{7} > 1 \,,$$

è anche

$$-1 + \sqrt{7} > 0 \quad \text{e} \quad -1 - \sqrt{7} < -2 \,.$$

L'intervallo $[-2, 0]$ è incluso nell'intervallo $[-1 - \sqrt{7}, -1 + \sqrt{7}]$. Quindi la disequazione è soddisfatta per $x < -1 - \sqrt{7}$ e per $x - 1 + \sqrt{7}$.

iv)

Bisogna distinguere i casi $a > 1$ ed $0 < a < 1$. se è $a > 1$, la disequazione è equivalente a

$$1 + 2x - x^2 > a^2 \iff x^2 - 2x + a^2 - 1 < 0 \,.$$

Il discriminate ridotto del trinomio di secondo grado vale $\Delta = 1 - a^2 + 1 = 2 - a^2$. Esso è positivo per $-\sqrt{2}, a < \sqrt{2}$. Allora se è $algeq\sqrt{2}$, la disequazione non ha soluzioni. se è $1 < a < \sqrt{2}$, la disequazione è soddisfatta all'interno dell'intervallo delle radici, che sono

$$x = 1 \pm \sqrt{2 - a^2}\,.$$

Per $1 < a < \sqrt{2}$, la diseqquazione è soddisfatta per

$$1 - \sqrt{2 - a^2} < x < 1 + \sqrt{2 - a^2}\,.$$

Sia, ora, $0 < a < 1$, la disequazione diviene

$$0 < 1 + 2x - x^2 < a^2\,.$$

Scriviamo esplicitamente il sistema.

$$\begin{cases} x^-2x - 1 < 0| :, \\ x^2 - 2 + a^-1 > 0\,. \end{cases}$$

Le radici del primo trinomio sono

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 1} = 1 \pm \sqrt{2}\,.$$

Le radici del secondo trinomio sono

$$-1 \pm \sqrt{2 - a^2}\,.$$

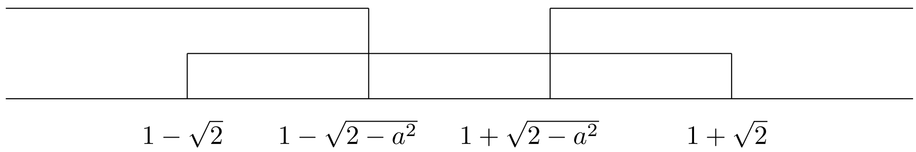
Poiché è

$$2 - a^2 < 2 \implies \sqrt{2 - a^2} < \sqrt{2}\,,$$

L'ordine dei numeri è

$$1-\sqrt{2}<1-\sqrt{2-a^2}<1+\sqrt{2-a^2}<1+\sqrt{2}\,.$$

Usiamo uno schema diverso per visualizzare le soluzioni.



Lo schema non ha bisogno di spiegazioni. Vi legge che il sistema è soddisfatto in due intervalli:

$$\left(1-\sqrt{2},1-\sqrt{2-a^2}\right)\bigcup\left(1+\sqrt{2-a^2},1+\sqrt{2}\right)\,.$$

vi)

Scriviamo la disequazione come

$$\log^3(x^3)>8=2^3\,.$$

Poiché l'elevamento al cubo è una funzione crescente, la disequazione è equivalente a

$$x^3>2 \iff x>\sqrt[3]{2}\,.$$

vi)

Occorre disviticchiare l'esercizio. È utile esprime tutto mediante lo stesso logaritmo, ad esempio mediante $\log(x^2)$. A primo membro siamo a posto. A secondo membro notiamo che possiamo scrivere

$$\log(x^6) \;=\; \log\left((x^2)^3\right) \;=\; 3\log(x^2)\,.$$

Allora è

$$\Big(\log(x^6)\Big)^4 = \Big(3\log(x^2)\Big)^4 = 81\log^4(x^2)\,.$$

Poniamo, ora, $\log(x^2)=t$, otteniamo la disequazione

$$t^2 \geq 81t^4 \iff 81t^4 - t^2 \leq 0\,.$$

scomponiamo il polinomio di quarto grado considerandolo la differenza di due quadrati. Otteniamo che deve essere

$$(9t^2 - t)(9t^2 + t) \leq 0\,.$$

Entrambi i fattori sono positivi all'esterno dell'intervallo delle radici. Le radici del primo fattore sono 0 e $\frac{1}{9}$, le radici del secondo fattore sono 0 e $-\frac{1}{9}$. Lo schema dei segni è mostrato nellas eguente tabella

	$-\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	
$+$	$+$	$-$	$+$	$9t^2 - t$
$+$	$-$	$+$	$+$	$9t^2 + t$
$+$	$-$	$-$	$+$	segno finale

La diseqquazione è soddisfatta per

$$-\frac{1}{9} \leq t \leq \frac{1}{9}\,.$$

Passiamo alla variabile x. Deve essere

$$-\frac{1}{9} \leq \log(x^2) \leq \frac{1}{9} \iff e^{-\frac{1}{9}} \leq x^2 \leq e^{\frac{1}{9}}\,.$$

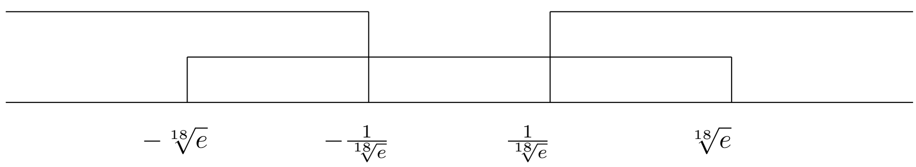
La disuguaglianza di destra è soddisfatta per

$$-\sqrt[18]{e} \leq x \leq \sqrt[18]{e}\,.$$

La disuguaglianza disinistra ec soddisfatta per

$$x \leq -\frac{1}{\sqrt[18]{e}} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{1}{\sqrt[18]{e}}\ ./$$

Usiamo il nuovo schema per rappresentare il risultato.



la disequazione è soddisfatta in

$$\left[-\sqrt[18]{e}, -\frac{1}{\sqrt[18]{e}}\right] \bigcup \left[\frac{1}{\sqrt[18]{e}}, \sqrt[18]{e}\right].$$

Esercizio I.7.8

Risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche.

i) $\text{tang}(x) > 1\,;$

ii) $\cos^2(x) > \dfrac{1}{2}\,;$

iii) $2\text{sen}(x) < 3\,;$

iv) $4\text{sen}^2(x) + 7\text{sen}(x) - 2 \leq 0\,;$

v) $\operatorname{sen}(2x) \leq \cos(x)$;

vi) $\dfrac{\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}}{\cos(x) + \frac{1}{2}} \geq 0$;

vii) $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) \geq 0$;

viii) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x) + 2 > 0$.

Soluzioni.

i)

La funzione $\operatorname{tang}(x)$ è una funzione periodica di periodo π. Basta studiare la disequazione su un intervallo lungo π. Scegliamo l'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. In tale intervallo la funzione $tang(x)$ è una funzione crescente. Allora la disequazione è soddisfatta in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

L'insieme di tutte le soluzioni è

$$\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \; k \in \mathbb{Z} .$$

ii)

La disequazione si scrive

$$\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad \cos(x) < -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La prima disequazione è soddisfatta in $(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$. La seconda in $(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$. $k \in \mathbb{Z}$. Possiamo scrivere l'unione dei due insiemi come

$$(-\frac{\pi}{4} + k\pi, +\frac{\pi}{4} + k\pi \; , \; k \in \mathbb{Z} .$$

iii)

Poiché è $-1 \leq \mathrm{sen}(x) \leq 1$, è anche $-2 \leq 2\mathrm{sen}(x) \leq 2 < 3$. La disequazione è soddisftta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

iv)

Posto $\mathrm{sen}(x) = t$, otteniamo la disequazione di secondo grado

$$4t^2 + 7t - 2 \leq 0 \, .$$

Le radici sono

$$x \;=\; \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{8} \;=\; \frac{-7 \pm 9}{8} \;=\; \begin{array}{l} \nearrow \;\; \frac{1}{4} \\ \searrow \;\; 2 \end{array} \, .$$

La disequazione è soddisfatta in $[\frac{1}{2}, 2]$. Passando alla variabile x, otteniamo la coppia di disequazioni

$$\frac{1}{2} \leq \mathrm{sen}(x) \leq 2 \, .$$

La disequazione di destra è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quella di sinistra è soddisfatta per

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z} \, .$$

v)

Scriviamo la disequazone come

$$2\mathrm{sen}(x)\cos(x) \leq \cos(x) \iff \cos(x)\Big(2\mathrm{sen}(x) - 1\Big) \leq 0 \, .$$

Studiamo la disequazione nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. poi estenderemo il risultato per periodictà .

È $\cos(x) \geq 0$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. È $2\text{sen}(x) - 1 \geq 0$ in $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$.

Lo schema dei segni è rappresentato nella seguente tabella.

$-\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$		
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$\cos(x)$
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$2\text{sen}(x) - 1$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	segno finale

La disequazione è soddisfatta per

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \, .$$

vi)

Studiamo i segni del numeratore e del denominatore su $[-\pi, \pi]$. È

$$\text{sen}(x) - \frac{1}{2} > 0 \iff \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi \, .$$

$$\cos(x) + \frac{1}{2} > 0 \iff -\frac{2}{3}\pi < x < +\frac{2}{3}\pi \, .$$

Lo schema dei segni è mostrato nella segente tabella

$-\frac{2}{3}\pi$	$+\frac{\pi}{6}$	$+\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5\pi}{6}$		
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$\text{sen}(x) - \frac{1}{2}$
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$\cos(x) + \frac{1}{2}$
$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	segno finale

La disequazione è sodisfatta per

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right) \bigcup \left[\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right) \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Le parentesi tonde o quadre sono state messe tenendo conto che dobbiamo accettare gli zeri del numeratore, ma non quelli del denominatore.

vii)

Usiamo un modo furbo per non fare calcoli inutili. Sfruttiamo l'identità trigonometrica

$$\mathrm{sen}(x) + \cos(x) \ = \ \sqrt{2}\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ .$$

Otteniamo la disequazione equivalente

$$\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \ .$$

Questa è soddisfata per

$$2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq (2k+1)\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2}{4}\pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

viii)

Riscriviamo la disequazione esprimendo tutti i termini in funzione di $\mathrm{sen}(\frac{x}{2})$.

$$\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 > 0 \iff$$

$$\iff \quad 3+\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)-2\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)>0 \quad \iff$$

$$\iff \quad 2\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)-\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+3<0 \,./$$

Poniamo $\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=t$, otteniamo la disequazione

$$2t^2-t-3<0\,.$$

Le radici sono

$$t \;=\; \frac{1\pm\sqrt{1+6}}{4} \;=\; \frac{1\pm\sqrt{7}}{4} \begin{array}{l} \nearrow \quad \dfrac{1+\sqrt{7}}{4} \\ \searrow \quad \dfrac{1-\sqrt{7}}{4} \end{array} .$$

Passando alla variabile x deve essere

$$\frac{-\sqrt{7}}{4}<\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1+\sqrt{7}}{4}\,.$$

Sia $x_1=\mathrm{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{7}}{4}\right)$, e $x_2=\mathrm{arcsen}\left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$. Allora la disuguaglianza è soddisfatta per

$$x_1+2k\pi<\frac{x}{2}<x_2+2k\pi \quad \text{e} \quad \pi-x_2+2k\pi<\frac{x}{2}<\pi-x_1+2k\pi,\; k\in\mathbb{Z}\,.$$

Equivalentemente possiamo scrivere le soluzioni come

$$2x_1+4k\pi<x<2x_2+4k\pi,\; k\in\mathbb{Z}\,,$$

e

$$-2x_2+(4k+2)\pi<x<-2x_1+(4k+2)\pi,\; k\in\mathbb{Z}\,.$$

Esercizi di riepilogo.

Esercizio I.7.9

Se è $a > b$ allora è $a^2 > b^2$?

Soluzione

La risposta è no. Infatti è $-2 > -3$, ma $4 = (-2)^2 < 9 = (-3)^2$.

Esercizio I.7.10

Se è $a > b$ allora è $a^3 > b^3$?

Soluzione.

La risposta è si perché la funzione elevamento al cubo è una funzione crecente che conserva le disuguaglianze.

Esercizio I.7.11

Se è $a > b$, allora è $\log_3(a) > \log_3(b)$?

Soluzione.

La risposta è si perché, essendo 3.1, lafunzione $\log_3(x)$ è una funzione crescente che conserva le disuguaglianze.

Esercizio I.7.12

Se è $a > b$, allora è $a + c > b + c$ per qualsiasi valore di c?

Soluzione.

La risposta è si. Si tratta della legge di annullamento della somma: aggiungendo o togliendo ad ambo i membri di una disuguaglianza lo stesso numero, la disuguaglianza resta la stessa.

Esercizio I.7.13

Se è $a > b$ e $c > d$, allora è $a + c > b + d$?

Soluzione.

La risposta è si. Formalmente possiamo procedere come segue. In base all'esercizio precedente è

$$a > b \implies a + c > b + c\,.$$

È anche

$$c > d \implies b + c > b + d\,.$$

Il risultato segue dalla proprietà transitiva del " minore"

$$a + c > b + c > b + d\,.$$

Esercizio I.7.14

Se è $a > b$ e $c > d$, allora è $a + d > b + c$?

Soluzione.

La risposta è no come mostra l'esempio.

$$8 > 2 \;\text{ e }\; 9 > 1 \;\text{ maè }\; 8 + 1 < 9 + 2| : .$$

Esercizio I.7.15

Risolvere le seguenti disequaizoni.

i) $\dfrac{x^2+x+1}{x-1} > 0$;

ii) $\dfrac{x^2+x+10}{x-1} > 1$;

iii) $\dfrac{x^2-7x+6}{x^3+x} > 0$;

iv) $\dfrac{x^4-4}{x^3-5x^2+4x} > 0$;

v) $\sqrt{x-1} \leq 4$;

vi) $|x-1| \leq 4$;

vii) $3^{x+3} > 9$;

viii) $3^x + 9^x > 0$;

ix) $\sqrt{2x+1} \leq x$;

x) $\log_3(x+3) \leq 0$;

xi) $\log_3(|x+3|) \leq 0$;

xii) $\log_5(2x+3) \leq 2$;

xiii) $2\cos(2x) + 1 \geq 0\,, x \in [0, 2\pi]$;

xiv) $\frac{\mathrm{sen}(x)}{1-2\mathrm{sen}(x)} > 0$.

Soluzioni.

i)

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore. Il discriminante del trinomio x^2+x+1 vale $\Delta = 1-4 < 0$. Il trinomio è sempre positivo. Il segno della frazione è dato dal segno del denominatore. Quindi la disequaione è soddisfatta per $x > 1$.

ii)

Scriviamo la disequazione come

$$\frac{x^2+x+10}{x-1} - 1 > 0 \iff \frac{x^2++10-x+1}{x-1} > 0 \iff$$

$$\iff \frac{x^2+11}{x-1} > 0\,.$$

Il numeratore è sempre positivo, quindi il segno della frazione è dato dal segno del denominatore. La disequazione è soddisfatta per $x > 1$.

iii)

Il denominatore si scompone come $x(x^2+1)$. Esso ha, quindi, il segno di x. Calcoliamo le radici del numeratore.

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \begin{array}{l} \nearrow \; 6 \\ \searrow \; 2 \end{array} .$$

Il numeratore è positivo all'esterno dell'intervaal $[1,6]$. Lo schema del segno della frazione è rappresentato nella seguente tabella.

	0	1	6	
$+$	$+$	$-$	$+$	x^2-7x+6
$-$	$+$	$+$	$+$	x^3+x
$-$	$+$	$-$	$+$	segno finale

Dalla tabella dei segni si deduce che la disequazione è soddisfatta per

$$0<x<1 \quad \text{e} \quad 6<x\,.$$

iv)

Il numeratore si scompone come $(x^-2)(x^2+2)$. Il fattore x^2+1 è sempre positivo, quindi il segno del numeratore è dato dal segno del fattore x^2-1. Questo fattore è positivo all'esterno dell'intervallo $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

Il denominatore si scompone come $x(x^2-5x+4)$. Calcoliamo le radici del trinoio si secondo grado.

$$x = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{array} .$$

La seguente tabella mostra i segni dei tre fattori che possono cambiare segno.

	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	4	
$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	x^2-2
$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	x^2-5x+4
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	x
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	segno finale

Dalla tabella si deduce che la disequazione è soddisfatta in

$$(-\sqrt{2},0)\cup(1,\sqrt{2})\cup(4,+\infty)\,.$$

v)

Affinché esita il radicale occorre che sia $x-1\geq 0$, cioè $x\geq 1$. Per tali x, eleviamo al qudrato ambo i membri ed ottteniamo il sitema

$$\begin{cases} x-1\leq 16\,, \\ x\geq 1\,. \end{cases}$$

La disequazione è soddisfatta per $1\leq x\leq 17$.

vi)

In questo caso ambo i membri della disequazione sono non negativi, quindi possiamo elevare al quadrato ambo i membri. Otteniamo la disequazione equivalente:

$$x^2-2x+1\leq 4 \iff x^2-2x-3\leq 0\,.$$

Questa disequazione è soddisfatta all'interno dell'intervallo delle radici che sono

$$1\pm\sqrt{1+3}\begin{array}{l}\nearrow \quad 3\\ \\ \searrow \quad -1\end{array}\,.$$

La disequazione è soddisfatta per $-1\leq x\leq 3$.

vii)

Scriviamo la disequazione in modo equivalente.

$$3^{x+3}>9 \iff 3^{x+3}>3^2 \iff x+3>2 \iff x>-1\,.$$

viii)

La disequazione è sempre soddisfatta perché ambedue gli addendi sono positivi.

ix)

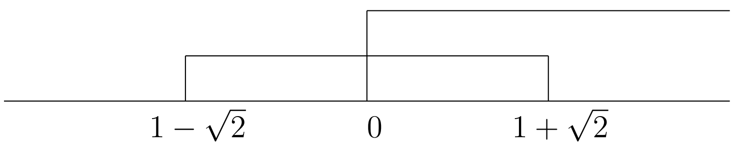
Affinché esista il radicale, deve essere $2x + 1 \geq 0$, cioè $x \geq -\frac{1}{2}$. Poiché il radicale, quando esiste, è non negativo, non ci saranno soluzioni se è $x < 0$; deve, quindi, essere $x \geq 0$. Elevando al quadrato ambo i mebri la disequazione divene

$$\begin{cases} 2x + 1 \leq x^2 \,, \\ x \geq 0 \,. \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \leq 0 \,, \\ x \geq 0 \,. \end{cases}$$

Le radici del trinomio di secondo grado sono

$$x \;=\; 1 \pm \sqrt{1+1} \;=\; 1 \pm \sqrt{2}\,.$$

Lo schema del sistema è mostrato nella seguente tabella.



Il sistema è soddisfatto per $0 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$

xi)

Poiché la base del logaritmo è $3 > 1$, lo stesso è una funzione crescente. Inoltre l'argomento del logaritmo deve essere positivo. La disequazione è soddisfatta per

$$0 < x + 3 \leq 1 \iff -3 < x \leq -2\,.$$

xii)

Poiché la base del logaritmo è $5 > 1$, lo stesso è una funzione crescente. Inoltre l'argomento del logaritmo deve essere positivo. Scriviamo 2 come $\log_5(5^2)$. La disequazione è soddisfatta per

$$0 < 2x + 3 \leq 5^2 \iff -\frac{3}{2} < x \leq 11 \,.$$

xiii)

Deve essere

$$\cos(2x) \geq -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x \in [0, 2\pi] \,.$$

Il modo più semplice di scrivere la soluzione è di lavorare sull'intervallo $-\pi.\pi]$. In tale intervallo la soluzione è

$$-\frac{2}{3}\pi \leq 2x \leq \frac{2}{3}\pi \iff -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \,.$$

Adesso riportiamo, aggiungendo o togliendo multipli di 2π, il risultato all'intervallo richiesto. L'intervallo che abbiamo in mano può essere scritto come unione di due intervalli.

$$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] = \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right] \bigcup \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \,.$$

Il secondo pezzo sta già nell'intervallo richiesto. Per il primo pezzo aggiungiamo 2π ai due estremi ed otteniamo che la disquazione è soddisfatta in

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \bigcup \left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right] \,.$$

xiv)

Studiamo il segno del numeratore e del denolinatore su un intervallo lungo 2π. Poi ripeteremo il risultato per periodicità . Sceglieremo l'intervallo in modo da scrivere le disuguaglianze in modo semplice.

$$\mathrm{sen}(x) > 0 \iff 0 < x > \pi \, .$$

$$1 - 2\mathrm{sen}(x) > 0 \iff sen(x) < -\frac{1}{2} \iff -\frac{7}{6}\pi < x < \frac{1}{6}\pi \, .$$

Facciamo lo schema dei segni sull'intervallo

$$\left[-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right] \, .$$

$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{7\pi}{6}$		$-\pi$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$	
	+		+		−		+		+		sen(x)
	−		+		+		+		−		$1-2$sen(x)
	−		+		−		+		−		segno finale

Dallo schema si vede che la disequazione è soddisfatta per

$$x \in \left(-\frac{7}{6}\pi, -\pi\right) \bigcup \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \, .$$

Su $\mathbb{R}$ la disequazione è soddisfatta per

$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < -\pi + 2k\pi \quad \text{e} \quad 0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \, , \; k \in \mathbb{Z} \, .$$