Ingegneria Edile - Corso di geometria - anno accademico 2009/2010

prova scritta del 27/1/2010
TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e la retta r passante per A e B.

(i)il punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in r$? | ~~vero~~ | falso |

(ii) Determinare l'equazione di un piano perpendicolare alla retta r e passante per A.

$y + z = 0$

(iii) Data la retta s di equazioni $\begin{cases} x \quad -y \quad +z \quad = 0 \\ \quad +y \quad -z \quad = 0 \end{cases}$

Determinare la posizione reciproca (coincidenti, parallele non coincidenti, incidenti, sghembe) della coppia di rette r e s.

PARALLELE non coincidenti

(iv) Determinare l'equazione parametrica di una retta passante per A e per l'origine.

$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente $r: \; t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ sia Π il piano passante per i punti A, B e C seguenti: $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(i) il punto $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Pi$? | ~~vero~~ | falso |

(ii) Determinare un vettore perpendicolare a Π : $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Determinare l'equazione di un piano Π' parallelo a Π tale che la distanza tra i due piani $= d(\Pi, \Pi') = \sqrt{6}$.

$x - 2y + z = 8$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ sia Q la quadrica di equazione $\{2x^2 + y^2 - 2yz + z^2 + 2y = 0\}$ e sia Π il piano di equazione $\{x = 1\}$

(i) Classificare la quadrica Q: Paraboloide ellittico

(ii) Classificare la conica $Q \cap \Pi$: Parabola

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ sia $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $\mathcal{S}$ la sfera di centro A e raggio 3. Determinare l'equazione del piano tangente alla sfera nel punto $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$z = 4$

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^2$ sia $\mathcal{F}$ il fascio di coniche passanti per $A = (1,0)$ $B = (-1,0)$, $C = (0,1)$, $D = (0,-1)$

(i) Esiste una parabola $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$? vero ~~falso~~

(ii) Esiste una circonferenza $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$? ~~vero~~ falso

(iii) Esiste una conica degenere $\Gamma \in \mathcal{F}$? ~~vero~~ falso

(iv) Determinare l'equazione di una conica del fascio $\mathcal{F}$ passante per il punto $(-1,-1)$

$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$

Esercizio 6. Al variare del parametro reale t si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \quad\; +tx_2 \; +4x_3 = 4 \\ tx_1 \; +x_2 \; -tx_3 = 2 \\ x_1 \; +tx_2 \; +2x_3 = 4 \end{cases}$$

(i) Il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se : $t \neq \pm 2$

(ii) Il sistema ammette infinite soluzione se e solo se : $t = 2$

(iii) Il sistema non ammette alcuna soluzione se e solo se : $t = -2$

Esercizio 7. I seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente INDIPENDENTI vero ~~falso~~

Esercizio 8. In $\mathbb{P}^2$ sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $\{2x^2 + 2xy + 4y^2 - z^2 = 0\}$, sia r la retta di equazione $\{x + y - 5z = 0\}$ e sia Q il punto di coordinate omogenee $Q = (1,4,1)$

(i) Determinare l'equazione della retta polare di Q rispetto a $\mathcal{C}$: $6x + 17y - z = 0$

(i) Determinare le coordinate del polo di r rispetto a $\mathcal{C}$: $(3 : 1 : 35)$

(1) $r: \quad A + t\cdot(B-A)$

$$v = (B-A) = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow r: \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

i) $C = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists\, t$ t.c. $\begin{cases}1 + 0\cdot t = 1\\ -1 + 2\cdot t = 0\\ 1 + 2t = 2\end{cases}$ $\quad t = \frac{1}{2}$ o.k.

ii)

$$2\cdot(y+1) + 2\cdot(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y + z = 0$$

iii) sostituiamo r nell'eq. di s

$$r: \begin{cases}x = 1\\ y = -1+2t\\ z = 1+2t\end{cases}$$

$$\begin{cases}1 - (-1+2t) + (1+2t) = 0\\ (-1+2t) - (1+2t) = 0\end{cases}$$

non $\exists$ SOL. $\Rightarrow r \cap s = \emptyset$

$\Rightarrow$ 2 POSSIBILITA': sghembe o parallele

Calcoliamo il vettore direttore di s:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$z = t$
$y = t$ $\Rightarrow$ $s := \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ vettore direttore $= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$x = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono paralleli.

$\Downarrow$

le 2 rette sono parallele non coincidenti.

iv)

$$\text{retta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v_1 = B - A = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = C - A = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v \perp \pi \iff \begin{cases} v \perp v_1 \\ v \perp v_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle v, v_1 \rangle = 0 \\ \langle v, v_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Sia $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $\begin{cases} -2a + 2c = 0 \\ -2a - 2b - 2c = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} a &= c \\ b &= -a - c \end{aligned} \Rightarrow \text{pongo } c = 1 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\pi' \parallel \pi \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' perpendicolare anche a π'!

$$\|v\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \Rightarrow$$

Per determinare $A' \in \pi'$ è sufficiente considerare A e sommare $\alpha \cdot v$ in modo che $\|\alpha \cdot v\| = \sqrt{6}$. Nel nostro caso $\alpha = 1$.

$$A' = A + v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \pi'$:

$$1 \cdot (x-3) + (-2) \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-3) = 0$$

π': $\quad x - 2y + z = 8$

---

③ $2x^2 + y^2 - 2yz + z^2 + 2y = 0$

i) $A = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\det(A) \neq 0$
$\Downarrow$
quadrica
non degenere

$A_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \det(A_{33}) = 0 \\ \det(A) = 0 \end{array}\right\}$ è PARABOLOIDE

Segnatura $A_{33} = (+ + 0)$

o autovalori $2, 2, 0$ $\Rightarrow$ Paraboloide ellittico

o $\det(A) = -1 < 0$

ii) $x = 1$: $y^2 - 2yz + z^2 + 2y + 2 = 0$

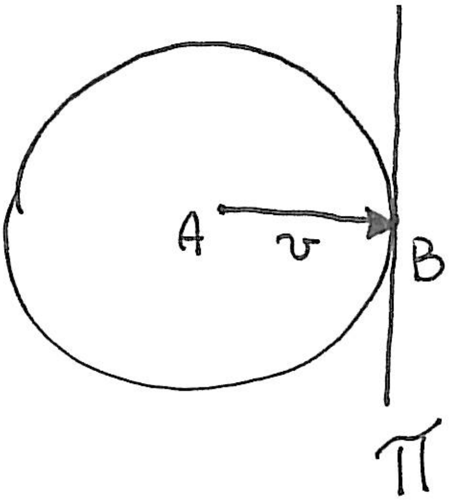
Rispetto alle incognite (y, z):

$A = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \det(A) \neq 0 \\ \det(A_{22}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Parabola

$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4



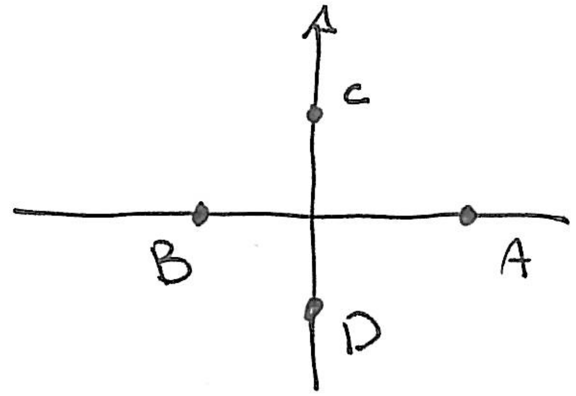
$$v = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

π tangente alla sfera S $\iff$ $\pi \perp v$, $B \in \pi$

$$\pi : \quad 0\cdot(x-4) + 0\cdot(y-0) + 3\cdot(z-4) = 0$$

$$\pi : \quad z = 4$$

5



$$\Gamma_1 = \{AB \cdot CD = 0\} \Leftrightarrow \quad x \cdot y = 0$$

$$\Gamma_2 : \quad \{BC \cdot DA = 0\} \Leftrightarrow \quad (y - x + 1) \cdot (y - x - 1) = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$$

Fascio : $\Gamma_2 + \lambda \Gamma_1 \iff$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 1 + \lambda \cdot xy = 0$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 + \frac{\lambda}{2} & 0 \\ -1 + \frac{\lambda}{2} & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

i)

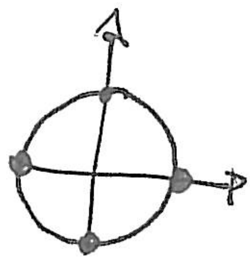
$\exists$ parabole $\iff$ $\det(A) \neq 0$

$\det(A_{22}) = 0$ impossibile

ii) $\exists$ circonferenza $\Leftrightarrow \left(-1+\frac{\lambda}{2}\right)=0$ + i coeff. di x^2 e y^2 sono uguali.

vero per $\lambda = 2$

In effetti $x^2+y^2=1 \in$ Fascio !



iii) Γ_1 e Γ_2 sono coniche degeneri !

iv) $\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \end{array}$: $1-2+1-1+\lambda=0$

$\Rightarrow \lambda = 1$

$$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$$

⑥ $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 4 \\ t & 1 & -t \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A_t) = t^2 - 4 \Rightarrow \det(A_t) \neq 0$ SE e SOLO SE $t \neq 2, -2$

Quindi per $t \neq 2, -2$

$\left.\begin{array}{l} rk(A_t) = 3 \\ (A_t \vdots b) \quad 3\times 4 \Rightarrow rk \leq 3 \end{array}\right\}$ & $3 = rk(A_t) \leq rk(A_t \vdots b) \leq 3$

$\Downarrow$

$3 = rk(A_t) = rk(A_t \vdots b)$

$\Downarrow$

$\exists$ unico soluz.

- Per $t = -2$ $\quad (A_t \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right)$

$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow rk(A_t \vdots b) = 3$

$rk(A_t) = 2 < 3 = rk(A_t \vdots b) \Rightarrow$ non $\exists$ SOL.

Per $t = 2$:

$$(A_t \vdots b) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \text{II colonna di } A_t$$

$$\Rightarrow \quad rk(A_t \vdots b) = rk(A_t) = 2$$

$\Rightarrow \quad \exists \; \infty$ SOLUZIONI

7) 4 vettori di $\mathbb{R}^3$ sono sempre lin. DIPENDENTI !

---

8) A = matrice associata a $\mathcal{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i)
eq. della polare di $Q = (1,4,1) \Leftrightarrow$

$$(1, 4\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$6x + 17y - z = 0$$

ii) Eq. POLO: $\left[A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right]^t =$

$$= \left(\frac{3}{7} : \frac{1}{7} : 5 \right) = (3 : 1 : 35)$$

$$= \left(\frac{3}{35} : \frac{1}{35} : 1 \right)$$

Ingegneria Edile - Corso di geometria - anno accademico 2009/2010

prova scritta del 27/1/2010 - SECONDA PARTE
TEMPO A DISPOSIZIONE: 30 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 2.1 Data A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f

$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 3$

(ii) Si determini la molteplicità algebrica e geometrica di ciascun autovalore

m.a. (0) = 2 m.a. (3) = 2
m.g. (0) = 2 m.g. (3) = 1

Esercizio 2.2 $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{-2}$

Esercizio 2.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 2.4 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa (rispetto alle basi canoniche) dalla seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La dimensione del nucleo di f è $= \boxed{2}$

La dimensione dell' immagine di f è $= \boxed{1}$

rk(A) = 1 = dim (Im(f))

dim (Ker) = 3 − 1 = 2