1) SOLUZIONI : 11.1.2010

i]
retta $r = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$

$c = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix} \in r \iff \exists\, t$ t.c. $\begin{cases} 5 = 1+2t \\ 2 = 0+t \\ 1 = 1 \end{cases}$

$t=2$ è soluzione

$\Rightarrow$ VERO !

ii] vettore $\perp$ al piano $= \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ equazione:

$$2(x-1) + 1\cdot(y-0) + 0\cdot(z-1) = 0$$

$$\iff \quad 2x + y - 2 = 0$$

iii] r: $\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = 0+t \\ z = 1 \end{array}$

sostituisco nell'equaz. di s : $\begin{cases} 1+2t+1 = 2 \\ 1+2t+t-1 = 0 \end{cases}$

SOLUZIONE: $t = 0 \Rightarrow r \cap s = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ rette incidenti

②

$$s: \begin{cases} x + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Poniamo $z = t$ parametro

$x = 2 - z = 2 - t$

$y = z - x = t - (2-t) = -2 + 2t$

$$\Rightarrow s: \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{iv}$ Sia r la retta $\perp$ a s e a r:

vettore direttore di $r = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$r \perp 2 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff 2a + b = 0$$

$$r \perp s \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -a + 2b + c = 0$$

CIOÈ:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} & b = -2a \\ & c = a - 2b = a + 4a = 5a \end{aligned}$$

Pongo $a = 1 \Rightarrow b = -2$; $c = 5$

eq. di r : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

2

$B - A = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C - A = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\pi : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

vettore $v \perp \pi \iff \begin{matrix} v \perp v_1 \\ v \perp v_2 \end{matrix}$

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ & $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} -a - b = 0 \\ a - 2b - 3c = 0 \end{cases}$$

$a = -b$

$3c = a - 2b = -3b$

Posto $b = 1$ si ha $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Equaz. di π:

$$-1\cdot(x-2) + 1\cdot(y-2) - 1\cdot(z-1) = 0$$

$$-x + y - z = -1$$

o, equivalentemente: $x - y + z - 1 = 0$

i]
$D \in \pi \iff 1 - 1 = 0$ O.K.

ii] $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

iii] sostituiamo $\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= -2t \\ z &= -t+4 \end{aligned}$ nell'eq. di π

$$(1+t) - (-2t) + (-t+4) - 1 = 0$$

$2t + 4 = 0$

$t = -2$ $\Rightarrow$ $\begin{aligned} x &= 1+(-2) = -1 \\ y &= -2(-2) = 4 \\ z &= -(-2)+4 = 6 \end{aligned}$ $\Rightarrow r \cap \pi = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

3) $-x^2+y^2+4yz+5z^2=0$

i)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&4&2&0\\0&2&5&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\det \tilde{A}=0$

$\Downarrow$

conica degenere

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&4&2\\0&2&5\end{pmatrix}$$

$\det(A)=-1\,(20-4)=-16$

segnatura di $A = -\ +\ +$

$\Rightarrow$ cono reale

ii) $\begin{cases} Q \\ x=1 \end{cases}$: $-1+y^2+4yz+5z^2=0$

Usando le coordinate y, z la matrice della conica diventa:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$\det(\tilde{A})=-1$

segnatura $\tilde{A} = +\ +\ -$

$\Rightarrow$ ellisse reale

4) $d(A, \pi) = \sqrt{3}$

eq: $(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 3$

---

5) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2\lambda \\ \lambda & 4 & 0 \\ 2\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\det(\tilde{A}) = -15\lambda^2 - 4 < 0 \quad \forall \lambda$

$\Rightarrow$ Ogni conica del fascio è non degenere

i) $\exists$ Parabole $\Leftrightarrow$ $\det(\tilde{A}) \neq 0$

$\text{car}(A) = 1$

$\det\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 4 \end{pmatrix} = 4 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$

$\Rightarrow$ Per $\lambda = \pm 2$ si ha una parabola

ii) Non $\exists$ circonferenze $C \in \mathcal{F}$ poiché $\forall \lambda$ il coeff. di $x^2 \neq$ coeff. di y^2

iii) Non $\exists$ conica degenere perché
$\det(\tilde{A}) \neq 0 \quad \forall \lambda$

iv) Sostituiamo $x = 1$
$y = 1$

$1 + 2\lambda + 4 + 4\lambda - 1 = 0$

$\lambda = -\frac{2}{3}$

---

6 $\quad A = \begin{pmatrix} t & t & 2 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = -t^2 + 3t - 2$

$\det(A) = 0 \iff t = 1, 2$

i) $\exists!$ sol. $\iff t \neq 1, 2$

Studiamo $rk(A \vdots b)$. $\boxed{\text{Per } t = 1, 2 \ rk(A) = 2}$

Per $t = 1$: $(A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$rk(A \vdots b) = 3$ poiché $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$

$\Rightarrow rk(A \vdots b) = 3 > 2 = rk(A)$

Per $t=2$

$$(A \vdots b) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$rk(A \vdots b) = 3$ perché $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ anche per $t=2$ non $\exists$ soluzione

---

7) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ sono lin. DIP.

---

8) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

i) Polare di (Q):

$$(3,4,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 7x + 23y - 2z = 0$

ii) $A^{-1} = \dfrac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Polare di r:

$$\begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \Rightarrow (-8:0:-20)$$

$= (2/5:0:1)$

OPPURE

$z=1$

$y=0$

$x=5$

$P_1: \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Polare di P_1:

$r_1: \; 5x + 5y - 2z = 0$

$z=1$

$x=0$

$y=5$

$P_2: \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Polare di P_2:

$r_1: \; 5x + 25y - 2z = 0$

$r_1 \cap r_2: \begin{cases} 5x + 5y - 2z = 0 \\ 5x + 25y - 2z = 0 \end{cases}$

$II - I: \quad 20y = 0 \qquad y = 0$

$z = 1$

$x = \frac{2}{5}$

$P = \left(\frac{2}{5} : 0 : 1 \right)$