POLARITÀ DI UNA CONICA IN $\mathbb{P}^2$ (coordinate omoge

Polarità definita da una conica non degenere

Data una conica di equazione $X^T A X = 0$ ed un punto non vertice $P'(x_1', x_2', x_3')$ si chiama polare del punto P' rispetto alla conica la retta p' di equazione

$$(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3')x_1 + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3')x_2 +$$

$$+ (a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3')x_3 = 0$$

cioè

$$X'^T A X = 0$$

il punto P' si chiama polo della retta p'

- Rispetto ad una conica ogni punto P' del piano ha una sola polare ed ogni retta p' del piano ha un solo polo se e solo se la conica è <u>non degenere</u>
- Inoltre ogni retta p' di equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ ha un solo polo se e solo se la conica è non degenere: infatti un polo $P' = (x_1', x_2', x_3')$ è polo della retta p' se e solo se

$$\begin{cases} a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' = \rho a \\ a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' = \rho b \\ a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' = \rho c \end{cases}$$ con ρ fattore di proporzionalità

La polare di un punto P rispetto ad una conica coincide:

se $P \in \gamma$ e P non è vertice con la retta tg la conica in quel punto

MODO ANALITICO (ESEMPIO) POLO → RETTA

Data una conica γ e un punto P non appartenente a γ trovare l'equazione della polare

$\gamma)$ $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (mi so che è un ellisse

P : $(1, 3, 1)$

faccio le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$ → siamo nel piano non c'è z ho messo 1 o calcolato tutto con x_1, x_2, x_3

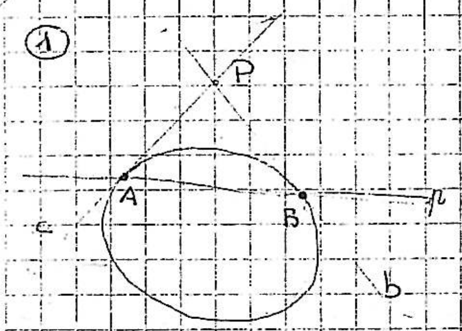
la retta è

$p)$ $x + 3y - 1 = 0$

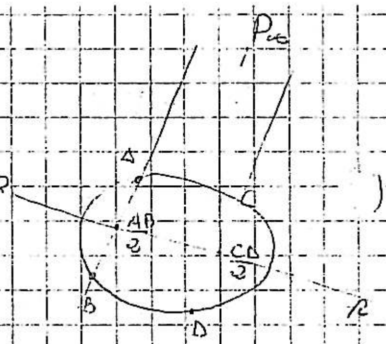
il punto P è il polo della retta che si chiama retta polare

METODO GRAFICO

①



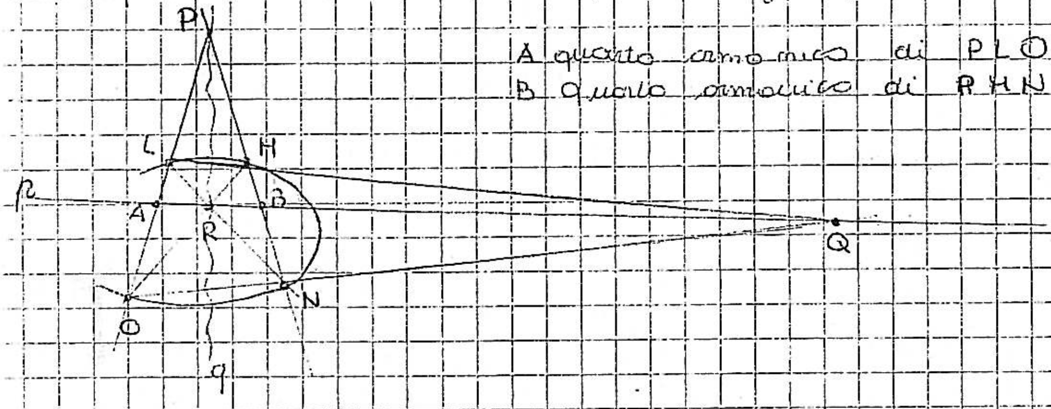
P = polo
quadrica non degenere



A polo → a) sua polare
B polo → b) sua polare

le polari a e b si incontrano in P e la polare di P passerà per A e B (th. di reciprocità)

② Si dice polare, rispetto ad una conica γ non degenere di un punto P' non appartenente a γ, il luogo dei coniugati armonici di P' rispetto ai punti della intersezione di γ con le rette per P' non tangenti γ e dei punti di contatto delle rette per P' e tangenti γ.



A quarto armonico di P L O
B quarto armonico di P H N

Polarità per una conica degenere
↓
spezzata

- Tutti i punti non vertici di una qualunque retta per V hanno lo stesso polo
  (non vertici: è un punto che soddisfa l'equazione della conica)
- Se due punti P' e P'' hanno lo stesso polare allora sono allineati con il vertice
- Se γ è una conica spezzata in due rette coincidenti, tutti i punti del piano non ∈ a γ hanno lo stesso polare e viceversa

ESEMPIO

① Data la conica di equazione

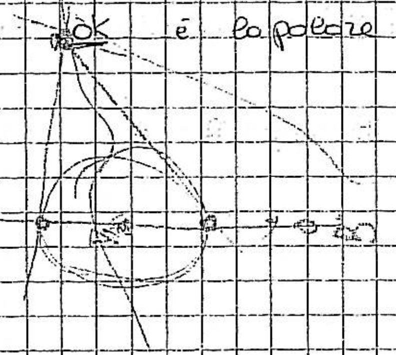
$$x^2+4y^2-2xu=0$$

e un punto $A(2,4,5)$ scrivere l'equazione della polare

- il punto $\in$? $4+4(16)-2(2)5=0$ No! non $\in$ alla γ

$$(2,4,5)\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&4&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&16&0\\-5&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

$= 2x-2+16y-5x = -3x+16y-2=0$ ok è la polare



② Determinare il polo R della retta r

$$r)\ x-2y+3u=0$$

rispetto alla conica

$$\gamma)\ 2xy+y^2-3xu=0$$

Per la legge di reciprocità, il polo di una retta è il punto di intersezione delle polari di due punti $\in$ alla retta

Scegliamo due punti di r

$A(2,1,0)$ $B(0,3,2)$

La polare di A ha eq

$$(2\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix}0&1&-\frac{3}{2}\\1&1&0\\-\frac{3}{2}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\u\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&2&-3\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\u\end{pmatrix} = 2y-3u+x+y = x+3y-3u=0$$

Lo polare di B è

$$(0,3,2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = 3x+3y-3x = $$

$$= y=0$$

Intersecando le due rette

$$\begin{cases} y=0 \\ x+3y-3u=0 \end{cases} \rightarrow x=3u$$

il polo R è $(3,0,1)$

ESERCIZI

$U(1,1,1)$ $\qquad$ $P(1,2,3)$

① $\Gamma \quad x^2+2y^2-4=0$ → in coordinate non omogenee

in coord. omogenee

$$x_1^2+2x_2^2-4x_3^2=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1+2x_2-4x_3=0$$

---

② $$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1+4x_2-12x_3=0$$

Dal polo alla polare

(3) $x^2 + 3xy + 4y^2 + u^2 = 0$

$P(5, -1, 1) \quad Q(1, -1, 0)$

sono reciproci rispetto ad essa.

Polare di P

$$(5, -1, 1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & \frac{15}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} =$$

$$5x + \frac{15}{2}y - \frac{3}{2}x - 4y + u = 0$$

$$x\left(5 - \frac{3}{2}\right) + y\left(\frac{15}{2} - 4\right) + u = 0 \qquad \frac{7}{2}x + \frac{7}{2}y + u = 0$$

$$p: 7x + 7y + 2u = 0$$

contiene Q

$$(1, -1, 0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix}$$

sono reciproche

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix}$$

contiene P

$$x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}x - 4y = 0$$

$$x\left(1 - \frac{3}{2}\right) + y\left(\frac{3}{2} - 4\right) = 0 \qquad \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}y = 0 \ : q$$

4) Dalla polare al polo

) La conica $x^2 - 3yu + au^2 = 0$

le rette a) $x - y = 0$
b) $ax - 3y + 2u = 0$
sono reciproche?

- Trovare il polo di a)
- Trovare il polo di b)

è il solito punto!

Trovo due punti di a) $A_0\ (1, 1, 0)$; $A_1\ (2, 2, 0)$

x_∞

Calcolo le polari

$$(1, 1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \quad (a_0$$

$$(2, 2, 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad 2x_1 - 3x_3 = 0 \quad (a_1$$

a.o. valore d il punt vero $A(9, 16, 0)$

intersezione a_0, a_1

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad x_1 = \frac{3}{2}x_3 \qquad 3x_3 - 3x_3 = 0$$

il punto $A\ (0, 0, 0)$

Trovare i due punti di b) $B_0\ (3, 4, 0)$

$B_1\ (0, 2, 3)$

$$(3, 4, 0)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = 3x_1 - 6x_3 = 0$$

$$(0, 2, 3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -\frac{9}{2} & 12 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = -3x_3 - \frac{9}{2}x_2 + 12x_3 = 0$$

$\frac{x_1}{2} = \frac{x_1}{2}\ x_3 \quad x_3 = \frac{x_1}{2}$

$x_1 = 2$

$x_3 = 1$

$-3 - \frac{9}{2}x_2 + 12 = 0$

$+\frac{9}{2}x_2 = +9$

$x_2 = 2$

$x_1 = 2$

$x_3 = 1$

Una volta hacer ;
per giuiaco
fe qpenluegen
alla volta hace
alla -