GEOMETRIA ELEMENTARE NELLO SPAZIO 3D

Equazioni parametriche di rette nello spazio

Fissato nello spazio un sistema di riferimento S se $P = (p_i)$, $X = (x_i)$ e a_i sono le componenti di $\vec{a}$ in S

$$x_i - p_i = t\,a_i \qquad i = 1, 2, 3$$

si dice sistema di equazioni parametriche della retta r

$$x_i = t\,a_i + p_i$$

$$\begin{cases} x = t\,a + p_x \\ y = t\,b + p_y \\ z = t\,c + p_z \end{cases}$$

coord. del piano — parametro — componenti vettore a — coord. punto P

ESEMPIO

① Dati il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ il vettore $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

la retta per P e parallela al vettore dato sarà

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

② la retta passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e parallela al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

sarà

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare le equazioni cartesiane basta eliminare il parametro t

$x = 2t + 1 \qquad x = 2(z-1) + 1 \rightarrow x = 2(-y-1) + 1 \qquad x = -2y - 1$

$y = -t - 1 \qquad y = -z + 1 - 1$

$z = t + 1 \rightarrow t = z - 1$

ESERCIZI

(1) Scrivere un sistema di equazioni della retta per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e parallela alla retta $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$

$$r' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

(2) Determinare l'equazione parametrica della retta

$x - y - 1 = 0$

$\begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \end{cases}$ ma non è la sola, $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \end{cases}$

(3) Rappresentare mediante un sistema di equazioni parametriche ciascuna delle seguenti rette

* $2x - 3y = 0$ $\quad \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t \end{cases}$

* $3x - y + 1 = 0$ $\quad \begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 \end{cases}$

* $x + 4y - 7 = 0$ $\quad \begin{cases} x = -4t + 7 \\ y = t \end{cases}$

* $5x + 3y - 2 = 0$ $\quad \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 5t \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{-5t + 2}{3} \end{cases}$

* $x = 0$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$

* $y = 0$ $\quad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$

(1) Scrivere un sistema di equazioni parametriche per ciascuna delle rette qui definite

* passante per l'origine e // alla retta $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \end{cases}$

$r: \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$

* passante per $(3,-4)$ e // alla retta $3x - 2y = 0$

$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$ $\begin{cases} x = t \\ y = +\frac{3}{2}t \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases}$

* passante per $(-1, 3)$ e $\perp$ alla retta $\begin{cases} x = 5t \\ y = 3t \end{cases}$

$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$

→ due rette in forma parametrica sono $\perp$ quando la somma dei prodotti delle loro comp è = 0. Due vettori sono $\perp$ quando $A \cdot B = 0$

* passante per $(0, 5)$ e $\perp$ alla retta $5x - 7y + 2 = 0$

$r: \begin{cases} x = -5t \\ y = 5 + 7t \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$

* passante per $(2,-2)$ ed avente coefficiente angolare 3

$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ $y = 3x$ $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases}$

* passante per $(-1, 5)$ e parallela all'asse y

$r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases}$ $x = k$ $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$

Retta per due punti

Dati nello spazio due punti $P = (p_i)$ e $Q = (q_i)$ distinti sia r la retta per essi. Un punto $X = (x_i)$ appartiene ad r se e solo se

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i) \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} t$$

che individuano un sistema di equazioni parametriche della retta r individuata da due punti P e Q

ESEMPIO

① Un equazione della retta r individuata da $A = (1, -1)$ e $B = (3, 2)$ è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{passaggio per A}} + \begin{pmatrix} +2 \\ +3 \end{pmatrix} t$$

vettore differenza delle componenti: individua il verso.

ESERCIZI

① Rappresentare mediante sistemi di equazioni parametriche le rette passanti per le seguenti coppie di punti

* A $(0, 0)$ B $(5, 7)$

$$r \begin{cases} x = 5t \\ y = 7t \end{cases}$$

* A $(3, 0)$ B $(0, 5)$

$$r \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 5t \end{cases}$$

* A $(-2, 1)$ B $(5, 1)$

$$r \begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 1 \end{cases}$$

* $A(-1, -1)$ $B(-1, 7)$

$$r: \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + 8t \end{cases}$$

* $A(-3, 4)$ $B(2, -6)$

$$r \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 4 - 10t \end{cases}$$

* $A(-3, 4)$ $B(7, -16)$

$$r \begin{cases} x = -3 + 10t \\ y = 4 - 20t \end{cases}$$

(2) Equazione parametriche e cartesiane della retta passante per $P_0(1, 0, 1)$ e $P_1(1, 1, 2)$

Le parametriche sono $\begin{cases} x = 1 + \\ y = t \\ z = 1 + 1t \end{cases}$

Le cartesiane $\begin{cases} y = z - 1 \\ x = 1 \end{cases}$

(3) Scrivere l'equazione della retta passante per $A(3, -2)$ e per il punto di intersezione fra

$r_1)$ $3x + 4y - 7 = 0$

$r_2)$ $x - 7y + 5 = 0$

Le due rette e il fascio $\lambda(3x + 4y - 7) + \mu(x - 7y + 5) = 0$

imponendo il passaggio da A viene $\lambda(-6) + \mu(22) = 0$
un vettore che soddisfa è $\lambda = 11$ $\mu = 3$
che immesso nel fascio da

$33x + 44y - 77 + 3x - 21y + 15 = 0$

$36x + 23y - 62 = 0$

④ Rette per i seguenti punti

* $A_1(0,0)$ $B(1,2)$

$m = \frac{2-0}{1-0} = 2$ $y = 2x$

* $A_2(0,1)$ $B(0,2)$

$m = 0$ ~~gcccccc~~

$x = 0$

* $A_3(3,5)$ $B(6,5)$

$m = \frac{0}{3} = 0$ $y = 5$

⑤ Retta passante per $A(1,2)$ e parallela a $x = 0$

~~gcccccc~~ $x = 1$

Passante per $C(1,-4)$ e // alla retta $2x - 3y + 2 = 0$

$$\begin{cases} \frac{2x}{2} - \frac{3}{2}t + \frac{2}{2} = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + \frac{3}{2}t \\ y = t \end{cases}$$

$x = 1 + \frac{3}{2}t$

$y = -4 + t \rightarrow t = y + 4$

$x = 1 + \frac{3}{2}(y+4) = x = 1 + \frac{3}{2}y + 6$ $2x - 3y - 14 = 0$

⑥ Calcolare la distanza del punto $P(4,5)$ dalla retta $3x - 4y - 2 = 0$

$$d = \frac{|3 - 20 - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{19}{5}$$

⑦ Scrivere le coordinate del punto P intersezione di

a) $3x + 4y + 1 = 0$ e

b) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

$P(x = 5, y = -4)$

$3(1+2t) + 4(2-3t) + 1 = 0 \Rightarrow 3 + 6t + 8 - 12t + 1 = -6t + 12 = 0$ $t = 2$

⑧ Scrivere l'equazione della curva spezzata nelle due rette parallele all'asse y e passanti rispettivamente per i punti:

$A(2,3)$ $B(5,-1)$

$x - 2 = 0$

$x - 5 = 0$

L'equazione richiesta è $(x-2)(x-5) = 0$

ovvero $x^2 - 5x - 2x + 10 = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0$