Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra lineare e Analisi II

anno accademico 2008/2009

ESERCITAZIONE 4.1

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

• Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
A, B matrici 3×3, $\Rightarrow \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$	☐	•
A, B matrici 3×3, $\Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$	•	☐
A, B matrici 3×3, $\Rightarrow rk(A+B) = rk(A) + rk(B)$	☐	•
v è autovettore per $f \Rightarrow 2v$ è autovettore per f	•	☐
v_1, v_2 sono autovettori per $f \Rightarrow v_1 + v_2$ è autovettore per f	☐	•
v_1, v_2 sono autovettori per f relativi allo stesso autovalore $\lambda_0 \Rightarrow v_1 + v_2$ è autovettore per f	•	☐
A matrice $3 \times 3 \Rightarrow \exists$ almeno un autovettore per l_A	•	☐
A matrice $2 \times 2 \Rightarrow \exists$ almeno un autovettore per l_A	☐	•
A matrice 2×2, $\det(A) = 0 \Rightarrow \exists$ almeno un autovettore per l_A	•	☐
$f : V \to V$, $Ker(f) \neq \{O_V\} \Longrightarrow 0$ è autovalore per f	•	☐
$f : V \to V$, $Ker(f) \neq \{O_V\} \Longrightarrow \exists$ almeno un autovettore per f	•	☐

• Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, il vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore 4 se : $f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore 5 se $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

• Il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ è autovettore per l' applicazione lineare l_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ t & 4 \end{pmatrix}$

se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ t & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, ovvero se $\begin{cases} 1+5 & = \lambda \cdot 1 \\ t-20 & = \lambda \cdot (-5) \end{cases}$ Quindi $\lambda = 6, t = -10$

• Nelle seguenti matrici l'autovalore 3 compare sempre con molteplicità algebrica 4. Determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 3 in ciascuno dei 4 esempi :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$m.g.(3) = 4 - 1 = 3$ $\quad m.g.(3) = 4 - 3 = 1$ $\quad m.g.(3) = 4 - 0 = 4$ $\quad m.g.(3) = 4 - 2 = 2$

NOTA BENE $m.g.(3) = 4 - \mathrm{rk}(A - 3 \cdot Id)$

• Determinare gli autovalori con la relativa molteplicità algebrica e geometrica in ciascuno dei 4 esempi :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A_1	A_2	A_3	A_4
$\lambda = 3, 4$	$\lambda = 3, 4$	$\lambda = 3, 4$	$\lambda = 3, 4$
$m.a.(3) = 3$; $m.g.(3) = 2$	$m.a.(3) = 2$; $m.g.(3) = 1$	$m.a.(3) = 1$; $m.g.(3) = 1$	$m.a.(3) = 1$; $m.g.(3) = 1$
$m.a.(4) = 1$; $m.g.(4) = 1$	$m.a.(4) = 2$; $m.g.(4) = 1$	$m.a.(4) = 3$; $m.g.(4) = 3$	$m.a.(4) = 3$; $m.g.(4) = 1$

SECONDA PARTE

Esercizio 1. Determinare per quali valori del parametro t il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ è autovettore per l' applicazione lineare l_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & -6 & -4 \end{pmatrix}$

Soluzione. Il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ è autovettore per l' applicazione lineare l_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & -6 & -4 \end{pmatrix}$

se $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & -6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, ovvero se $\begin{cases} 1-5 & = \lambda \cdot 1 \\ -5t & = 0 \\ t+20 & = \lambda \cdot (-5) \end{cases}$ Quindi $\lambda = -4, t = 0$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di f.
(iii) Esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per f ?

Soluzione. (i)Sia A la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. Il polinomio caratteristico di f è

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \cdots = (3-\lambda) \cdot (5-\lambda)^3$$

Quindi gli autovalori di f sono :
$\lambda_1 = 3$ con molt. algebrica =1
$\lambda_2 = 5$ con molt. algebrica =3
Vediamo le molteplicità geometriche. Poichè

$$1 \le m.g.(\lambda_i) \le m.a.(\lambda_i)$$

allora si ha: $m.g.(3) = 1$.
Per determinare $m.g.(5)$ calcoliamo $\dim Ker(f - 5 \cdot id)$.

$A-5\cdot Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha due righe nulle e due righe lin. IND. Pertanto si ha: r$k(A-5\cdot Id) = 2$ e quindi $\dim Ker(f - 5 \cdot id) = 4 - 2 = 2 = m.g.(5)$.

CONCLUSIONE: Gli autovalori sono

$\lambda_1 = 3$ con molt. algebrica =1 e molteplicità geometrica=1;

$\lambda_2 = 5$ con molt. algebrica =3 e molteplicità geometrica=2.

(ii) Per determinare gli autovalori relativi a $\lambda_1 = 3$ calcoliamo $Ker(f - 3 \cdot id)$.

$v \in Ker(f - 3 \cdot id) \Leftrightarrow (A - 3 \cdot Id) \cdot v = 0_V \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ & & 2x_3 & & = 0 \\ & x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è data da $x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = t, x_2 = -t$. Pertanto gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 3$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

Per determinare gli autovalori relativi a $\lambda_2 = 5$ calcoliamo $Ker(f - 5 \cdot id)$. Sappiamo già che m.g.=2, ovvero lo spazio delle soluzione del sistema avrà dim=2.

$v \in Ker(f - 5 \cdot id) \Leftrightarrow (A - 5 \cdot Id) \cdot v = 0_V \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} & & 0 & = 0 \\ -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è data da $x_3 = 0, x_4 = t, x_2 = t, x_1 = s$. Pertanto gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 5$ sono:

$$\left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad (s,t) \neq (0,0) \right\}.$$

(iii) Poichè $m.g.(\lambda_1) + m.g.(\lambda_2) = 1 + 2 < 4$ non esiste una base costituita da autovettori per f.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -9 & -3 \end{pmatrix}$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

Soluzione.

(i)Sia A la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. Il polinomio caratteristico di f è

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & -9 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \cdots = \lambda^2 \cdot (4 - \lambda)$$

Quindi gli autovalori di f sono :

$\lambda_1 = 0$ con molt. algebrica =2

$\lambda_2 = 4$ con molt. algebrica =1

Vediamo le molteplicità geometriche. Poichè $1 \leq m.g.(\lambda_i) \leq m.a.(\lambda_i)$, allora si ha: $m.g.(4) = 1$.

Per determinare $m.g.(0)$ calcoliamo $\dim Ker(f)$.

r$k(A) = 2$ e quindi $\dim Ker(f) = 3 - 2 = 1 = m.g.(0)$.

CONCLUSIONE: Gli autovalori sono
$\lambda_1 = 0$ con molt. algebrica =2 e molteplicità geometrica=1;
$\lambda_2 = 4$ con molt. algebrica =1 e molteplicità geometrica=1.

(ii) Per determinare gli autovalori relativi a $\lambda_2 = 4$ calcoliamo $Ker(f - 4 \cdot id)$.
$v \in Ker(f - 4 \cdot id) \Leftrightarrow (A - 4 \cdot Id) \cdot v = 0_V \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} & & 0 & = 0 \\ & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -9x_2 & -7x_3 & = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è data da $x_3 = t, x_2 = t, x_1 = 8t$. Pertanto gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 4$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

Per determinare gli autovalori relativi a $\lambda_1 = 0$ calcoliamo $Ker(f)$. Sappiamo già che m.g.=2, ovvero lo spazio delle soluzione del sistema avrà dim=1.
$v \in Ker(f) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4x_1 & & & = 0 \\ & 3x_2 & +x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -9x_2 & -3x_3 & = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è data da $x_1 = 0 x_2 = t, x_3 = -3t$. Pertanto gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 0$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

Esercizio 4. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Dimostrare che A è diagonalizzabile
(ii) Dimostrare che A^2 è diagonalizzabile
(iii) Dimostare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n$ è diagonalizzabile

Soluzione. (i) Gli autovalori di A sono:
$\lambda_1 = 0$ con $m.a.(0) = 1 = m.g.(0)$
$\lambda_2 = 2$ con $m.a.(2) = 2 = m.g.(2)$
Dal ben noto teorema sulla diagonalizzabilità di matrici si ha

$$A \text{ è diagonalizzabile} \iff \forall \lambda_i \;\; m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$$

Quindi poichè in questo caso per entrambi gli autovalori si ha $m.a. = m.g.$ allora A è diagonalizzabile.

(ii) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Gli autovalori di A^2 sono:
$\lambda_1 = 0$ con $m.a.(0) = 1 = m.g.(0)$
$\lambda_2 = 4$ con $m.a.(4) = 2 = m.g.(4)$
Quindi poichè per ogni autovalore λ_i si ha $m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$ allora la matrice A^2 è diagonalizzabile.

(ii) **I metodo**. Per induzione si può dimostrare che in questo caso $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

Pertanto gli autovalori di A^n sono:
$\lambda_1 = 0$ con $m.a.(0) = 1 = m.g.(0)$
$\lambda_2 = 2^n$ con $m.a.(2^n) = 2 = m.g.(2^n)$
Quindi poichè per ogni autovalore λ_i si ha $m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$ allora la matrice A^n è diagonalizzabile $\forall n \in \mathbb{N}$.
II metodo. Sia v_0 autovettore relativo all'autovalore λ_0.

Usando la notazione matriciale possiamo dire che v_0 verifica l'equazione

$$A \cdot v_0 = \lambda_0 \cdot v_0$$

Per definizione si ha $A^2 \cdot (v_0) = A \cdot (A \cdot v_0)$. Poichè v_0 è autovettore relativo a λ_0 si ha $A \cdot v_0 = \lambda_0 \cdot v_0$ e quindi l'equazione diventa

$$A^2 \cdot (v_0) = A \cdot (A \cdot v_0) = A \cdot (\lambda_0 \cdot v_0) = \lambda_0 \cdot (A \cdot v_0) == \lambda_0 \cdot (\lambda_0 \cdot v_0) = (\lambda_0)^2 \cdot v_0$$

Cioè v_0 è autovettore anche per A^2 relativo all' autovalore λ_0^2.

Ripetendo questo ragionamento si dimostra che se v_0 è autovettore per A relativo all'autovalore λ_0 allora v_0 è anche autovettore per A^n relativo all'autovalore λ_0^n.

Quindi poichè 2 è autovalore per A con $m.g. = 2 = m.a$ allora 2^n sarà autovalore per A^n con $m.g. = 2 = m.a.$ Analogamente 0 sarà autovalore per A^n con $m.g. = 1 = m.a.$

III metodo. A è diagonalizzabile, quindi esiste una matriciale invertibile M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M = D$ con D matrice diagonale avente gli autovalori sulla diagonale.

In questo caso $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ma una potenza di una matrice diagonale è diagonale, cioè D^2 è anch'essa diagonale. Quindi possiamo scrivere

$$D^2 = (M^{-1} \cdot A \cdot M) \cdot (M^{-1} \cdot A \cdot M) = M^{-1} \cdot (A^2) \cdot M$$

Cioè A^2 è simile a D^2 e viene diagonalizzata dalla stessa matrice che diagonalizza A.

Ripetendo questo argomento per A^n si ottiene

$$D^n = \underbrace{(M^{-1} \cdot A \cdot M) \cdot \cdots \cdot (M^{-1} \cdot A \cdot M)}_{n \quad volte} = M^{-1} \cdot (A^n) \cdot M$$

Cioè A^n viene diagonalizzata dalla stessa matrice che diagonalizza A.

Esercizio 5. Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice $A \in \mathcal{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ è triangolarizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico della matrice A è il seguente polinomio di grado 2 nella variabile λ con il parametro β:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & \beta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \beta \cdot \lambda + 1$$

La matrice A ètriangolarizzabile (su $\mathbb{R}$) se e soltanto se tutte le radici del polinomio caratteristico sono in $\mathbb{R}$. In questo caso le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4}}{2}$.

Pertanto A è triangolarizzabile se e soltanto se $\Delta = \beta^2 - 4 \geq 0$ ovvero se e solo se:
$\beta \leq -2$ oppure $\beta \geq 2$.

Esercizio 6. Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Gli autovalori di A sono
$\lambda_1 = 1$ con $m.a.(1) = 2$
$\lambda_2 = 4$ con $m.a.(-4) = 1$.

$$A \text{ è diagonalizzabile} \iff \forall \ \lambda_i \ \ m.a.(\lambda_i) = \ m.g.(\lambda_i)$$

In questo caso $m.g.(-4) = 1 = m.a.(-4)$ per qualsiasi β poichè in generale si ha sempre:
$1 \leq m.g.(\lambda_i) \leq m.a.(\lambda_i)$.

Quindi rimane da analizzare per quali valori del parametro β l'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità geometrica =2.

$$A - 1 \cdot Id = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ma tale matrice ha sempre rango 2 per qualsiasi valore di β in quanto la colonna II e la colonna III sono sempre linearmente indipendenti, o, equivalentemente, il minore $\begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ ha sempre determinante non nullo.

In conclusione per ogni β si ha $m.g.(1) = 1 < 2 = m.a.(1)$, quindi A non è mai diagonalizzabile.

Esercizio 7. Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & \beta \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico della matrice A è il seguente polinomio di grado 2 nella variabile λ con il parametro β:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -5 \\ 5 & \beta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \beta \cdot \lambda + 25$$

La matrice A ètriangolarizzabile (su $\mathbb{R}$) se e soltanto se tutte le radici del polinomio caratteristico sono in $\mathbb{R}$. In questo caso le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 100}}{2}$.

Pertanto A è triangolarizzabile se e soltanto se $\Delta = \beta^2 - 100 \geq 0$ ovvero se e solo se:
$\beta \leq -10$ oppure $\beta \geq 10$.
Inoltre se $\beta \neq \pm 10$ la matrice A ha due autovalori distinti di molteplicità=1 quindi è sicuramente diagonalizzabile.
Rimane da studiare il caso $\beta = 10$ e il caso $\beta = -10$.
Se $\beta = 10$ la matrice A diventa $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha un unico autovalore $\lambda_1 = 5$ con $m.a.(5) = 2$.
Calcoliamo $m.g.(5)$.
$A - 5 \cdot Id = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ ha rango =1 e quindi $m.g.(5) = 2 - 1 < m.a.(5) = 2$. s
Cioè per $\beta = 10$ A è triangolarizzabile ma non diagonalizzabile.
Analogamente per $\beta = -10$ si ha $\lambda_1 = -5$ autovalore con $m.a.(5) = 2 > 1 = m.g.(5)$.
CONCLUSIONE:
A è triangolarizzabile $\Leftrightarrow \beta \leq -10$ oppure $\beta \geq 10$;
A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \beta < -10$ oppure $\beta > 10$;
A è triangolarizzabile ma non diagonalizzabile $\Leftrightarrow \beta = \pm 10$.

Esercizio 8. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Determinare gli autovalori di A^5.

Soluzione. In questo caso è possibile applicare uno due metodi esposti nell'esercizio 4.
Gli autovalori di A sono : 2,-2 entrambi con molteplicità algebrica =1.
Quindi gli autovalori di A^5 sono 2^5 e -2^5, entrambi con molteplicità algebrica=1.