Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2004/2005

SOLUZIONE della prova scritta del 18-1-2005

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = -4 \cdot \overline{z}^2 \\ |e^{iz}| > 1 \end{cases}$$

Soluzione .

I . Osserviamo che $z = 0$ è soluzione della prima equazione.

Supponiamo ora $z \neq 0$ ed esprimiamolo nella forma esponenziale : $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$. Poichè $\overline{z} = \varrho \cdot e^{-i}\vartheta$ e $-1 = e^{i\pi}$ la prima equazione diventa

$$\varrho^4 = 4e^{i\pi} \cdot \varrho^2 \cdot e^{-i2\vartheta}$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti otteniamo

$$\begin{cases} \varrho^4 = 4 \cdot \varrho^2 \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \\ 4\vartheta = \pi - 2\vartheta + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi le seguenti soluzioni distinte: $\begin{cases} \varrho = 2 \\ \vartheta = \frac{\pi + 2k\pi}{6}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$

Pertanto le soluzioni della prima equazione sono

$$z = \sqrt{3} + i, 2i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i, -2i, \sqrt{3} - i, 0$$

(ii) : Posto $z = x + iy$, tenuto conto che $|e^{ix}| = 1$ per qualsiasi x numero reale si ha

$$\begin{aligned} &|e^{iz}| > 1 && \Leftrightarrow \\ &|e^{ix-y}| > 1 && \Leftrightarrow \\ &|e^{ix}| \cdot |e^{-y}| > 1 && \Leftrightarrow \\ &e^{-y} > 1 && \Leftrightarrow \\ &y < 0 \ , \quad x = \text{qualsiasi} && \end{aligned}$$

CONCLUSIONE: Ponendo la condizione $y < 0$ nella soluzione della equazione (i) otteniamo che la soluzione del sistema è data da $z = -\sqrt{3} - i, \quad -2i, \quad \sqrt{3} - i$.

Esercizio 2. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $f_t(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$: $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$,

determinare, se esistono, i valori di t per cui $\quad Ker(f_t) \subset W$.

Soluzione .

(i) : Sia A_t la matrice associata ad f_t rispetto alla base canonica: $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Poichè A_t è una matrice 3×3, per determinare il rango calcoliamo il determinante di A_t facendo lo sviluppo rispetto alla II colonna.

$$\det(A_t) = ... = t \cdot (1 - t)$$

Pertanto se $t \neq 0, 1$ il determinante è $\neq 0$ e quindi il rango di A_t è massimo. Ovvero

$$t \neq 0, 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = 0$ abbiamo $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Poichè la I e la III colonna sono linearmente indipendenti possiamo affermare che il rango di A_0 è 2.

Per $t = 0$ abbiamo $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sappiamo che $\det A_1 = 0$.

Inoltre osserviamo che se prendiamo il minore $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(M) \neq 0$.

Pertanto possiamo affermare che il rango di A_1 è 2.

Per il teorema della dimensione si ha $\dim(Im(f_t)) + \dim(Ker(f_t)) = 3$. Allora possiamo concludere che

$$t \neq 0, 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 3 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 0 \end{cases}$$

$$t = 0, 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(Im(f_t)) = \mathrm{r}k(A_t) = 2 \\ \dim(Ker(f_t)) = 3 - \mathrm{r}k(A_t) = 1 \end{cases}$$

(ii) Per il teorema di Rouché-Capelli esiste almeno una soluzione $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}k(A_t) = \mathrm{r}k(A_t|b_t)$ dove $b_t = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per il punto (i) se $t \neq 0, 1$ si ha $\det(A_t) \neq 0$ e quindi $\mathrm{r}k(A_t) = 3$.

Poichè $\mathrm{r}k(A_t) \leq \mathrm{r}k(A_t|b_t)$ e abbiamo $\mathrm{r}k(A_t|b_t) \leq 3$ perchè $(A_t|b_t)$ è una matrice 3×4 possiamo concludere che per $t \neq 0, 4$ $3 = \mathrm{r}k(A_t) = \mathrm{r}k(A_t|b_t)$. Più precisamente, per questi valori di t esiste un'unica soluzione.

Analizziamo adesso i casi particolari.

Per $t = 0$ la matrice ha A_0 ha rango 2. La matrice $(A_0|b_0)$ diventa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Poichè la colonna b_0 è la colonna nulla, in questo caso sicuramente $\mathrm{r}k(A_0) = \mathrm{r}k(A_0|b_0)$ e quindi esiste soluzione del sistema (la soluzione è data dai vettori del nucleo !).

Per $t = 1$ la matrice ha A_1 ha rango 2. La matrice $(A_1|b_1)$ diventa: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il minore ottenuto eliminando la prima colonna $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo, pertanto in questo caso si ha $\mathrm{r}k(A_1|b_1) = 3$ da cui si evince che $\mathrm{r}k(A_1|b_1) = 3 > 2 = \mathrm{r}kA_1$, ovvero non esiste soluzione del sistema.

CONCLUSIONE: Esiste almemo una soluzione del sistema $\forall\ t \neq 1$.

(iii). Sia $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Osserviamo che i due vettori sono linearmente indipendenti pertanto $\dim(W) = 2$.

Per quanto visto al punto (i), per $t \neq 0, 1$ si ha $Ker(f_t) = \{0_V\}$, e quindi, poichè W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, necessariamente $Ker(f_t) = \{0_V\} \subset W$.

Analizziamo adesso i casi particolari $t = 0, 1$.

Per $t = 0$ determiniamo una base di $Ker(f_0)$. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + \quad +x_3 & = 0 \\ \qquad x_3 & = 0 \\ x_1 + \quad +x_3 & = 0 \end{cases}$$

Applicando l' algoritmo di Gauss e svolgendo i calcoli si ottiene come base $\left\{ v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

In questo caso avremo

$$ker(f_0) \subset W \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sono linearmente dipendenti.}$$

Poichè $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ allora $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ e quindi si ha $Ker(f_0) \subset W$.

Per $t = 1$ determiniamo una base di $Ker(f_1)$. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + \quad + x_3 & = 0 \end{cases}$$

Applicando l' algoritmo di Gauss e svolgendo i calcoli si ottiene come base $\left\{ v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

In questo caso avremo

$$ker(f_1) \subset W \iff \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sono linearmente dipendenti.}$$

Ma considerando la matrice formata dai tre vettori e calcolandone il determinante si ottiene

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

e quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti. Cioè per $t = 1$ $Ker(f_1) \not\subset W$.

Eserczio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Si determinino gli autovalori di f^2.

Soluzione. (i) Posto $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$.
Sviluppando rispetto alla III colonna otteniamo:

$$\det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) + (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (1-\lambda) \cdot \lambda^2$$

Abbiamo pertanto i seguenti autovalori di A:
$\lambda_1 = 1$ con molteplità algebrica $= 1$;
$\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica $= 2$.

Per determinare la moteplicità geometrica occorre calcolare il rango di $(A - \lambda Id)$.

Per $\lambda_1 = 1$, poichè sappiamo che $1 \leq \ m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$ per ogni autovalore abbiamo subito $m.g.(\lambda_1) = 1$.

Per $\lambda_2 = 0$ analizziamo la matrice $(A - 0Id) = A$. Poichè il minore ottenuto eliminando l aI riga e la III colonna di A è non nullo otteniamo r$k(A) = 2$ e quindi $m.g.(0) = 4 - \mathrm{r}k(A) = 1$. In particolare la matrice non è diagonalizzabile.

(ii) Per $\lambda_2 = 0$ dobbiamo determinare il $Ker(f)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che gli autovettori per f relativi all'autovalore $\lambda_2 = 0$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

Per $\lambda_1 = 1$ dobbiamo determinare il $Ker(f - Id)$, ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che gli autovettori per f relativi all'autovalore $\lambda_1 = 1$ sono:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \quad t \neq 0 \right\}.$$

(iii) Per determinare gli autovalori di f^2 occorre studiare la matrice $A^2 = A \cdot A$:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè la matrice è triangolare superiore il polinomio caratteristico diventa $(1 - \lambda) \cdot \lambda^2$ Abbiamo pertanto i seguenti autovalori di A^2:

$\lambda_1 = 1$ con molteplità algebrica $= 1$;

$\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica $= 2$.

(N.B. In generale si può dimostrare che se λ_0 è autovalore per f allora λ_0^2 è autovalore per f^2.)