Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 2/7/2013

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CORSO DI LAUREA: INGEGNERIA

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 2 + 2i$. Allora $z^{-1} =$

- Sia $z = 4i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$

- Dati W, Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

  $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$, $Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 - 3x_3 = 0\}$,

  determinare una base di $W \cap Z$:

- det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è triangolarizzabile | vero | falso |

- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore per l' applicazione lineare l_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ se $t =$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si consideri l'autovalore $\lambda_0 = 1$. Allora: $m.a.(1) =$; $m.g.(1) =$

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-i)^2 = 2\overline{z} + 2i \\ |e^z| \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

determinare, se esitono, i valori di t per cui $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Im(\mathcal{L}_{A_t})$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \ ; \quad Ker(f) = \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Determinare gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è diagonalizzabile. Dire se A^2 è diagonalizzabile.