Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2014/2015
Prova scritta del 2/07/2015
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = \sqrt{3} + 3i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{}$

- $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \implies z^3 =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \ . \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$$ vero | falso

Determinare una base di W:

$\boxed{}$

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(A) = \boxed{} \qquad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{}$$

- $$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

- $$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \implies A \text{ è triangolarizzabile}$$ vero | falso

- Il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(2, 3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^3 = \overline{z}^5 \\ |z-1| \leq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 3 & -t \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = -1$ determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Ker(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 - 2x_2 = 0\}; \quad Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.