Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2013/2014

Prova scritta del 23/07/2014
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Si consideri il numero complesso $z = 1 + i$. Determinare (parte reale e parte immaginaria) di z^8 :

- Sia $z = 3\sqrt{3} + 3i$. Scrivere z nella forma trigonometrica $\varrho \cdot e^{i\theta}$:

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

(i) $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso |

(ii) Determinare una base di W:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \qquad \mathrm{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ è autovettore per f relativo all'autovalore $\lambda = 2$ SE $f(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}) =$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 2 è =

- $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^z = -e^2 \\ |z-2| \leq 5\pi \end{cases}$$

• **Esercizio 2. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Post $t = 0$, determinare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che

$$W \bigoplus Im(\mathcal{L}_A) = \mathbb{R}^4$$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \qquad f^2 = 0$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile