**Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria** |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
(Corso di Laurea)

**prova scritta del 16-01-2002**

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Cognome) |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Nome) |_|_|_|_|_|_|_| (Numero di matricola)

**Esercizio 1.** Si trovino tutte le soluzioni complesse $(z, w)$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^3 + w^3 = \frac{i}{2} \\ w^2 = -1 \end{cases}$$

**Esercizio 2.** Al variare del parametro $\beta$ sia $f_\beta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1-\beta \\ 0 & 1-\beta & 0 & 2 \\ \beta - 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione di $\operatorname{Ker} f_\beta$ e di $\operatorname{Im} f_\beta$.
(ii) Nel caso $\beta = 1$ si determinino, se esistono, tutte le soluzioni del sistema:

$$f_1(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(iii) Nel caso $\beta = 0$ si trovi un supplementare di $\operatorname{Im} f_0$.

**Esercizio 3.** Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio dei polinomi di grado $\leq 2$ e sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(p) = p' + \int_0^1 p(x)dx$$

ove $p'$ indica la derivata del polinomio $p$.
(i) Si determini la dimensione di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.
(ii) Si determinino gli autovalori di $f$.
(iii) Si dica se $f$ è diagonalizzabile e/o triangolarizzabile.

**Esercizio 4. [Ingegneria Biomedica, Elettrica, Energetica e Informatica]**

Sia $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

i) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
ii) Dire se tale prodotto scalare è definito.
iii) Determinare, se esiste, un vettore $v$ tale che $\langle v,\ v\rangle = -4$.

**Esercizio 5.[Ingegneria Informatica]**

Si determinino le soluzioni intere del sistema

$$\begin{cases} 2^x \equiv 15 \quad (mod\ 17) \\ 2x \equiv 15 \quad (mod\ 17) \end{cases}$$