Geometria a.a. 2020-2021 – programma svolto

Ingegneria Edile-Archiettura e Ingegneria per il Design Industriale
Docente: Mauro Di Nasso

Nozioni preliminari. Connettivi logici e quantificatori. Negazioni, equivalenza logica. Insiemi e operazioni insiemistiche. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Composizione di funzioni. Una funzione è iniettiva se e solo se ha un'inversa sinistra, ed è suriettiva se e solo se ha un'inversa destra. Coordinate polari nel piano: modulo, argomento.

Vettori. Modulo, direzione, verso. Operazioni di somma, prodotto scalare, perpendicolarità. Coordinate cartesiane e identificazione tra vettori e punti dello spazio euclideo R^n. Vettori canonici. Formule per il modulo, e per le coordinate della somma e per il prodotto scalare. Formula per l'angolo compreso tra due vettori.

Nozioni fondamentali di geometria analitica. Le rette per l'origine nel piano come luogo geometrico dei vettori perperpendicolari ad un vettore assegnato. L'analogo luogo geometrico nello spazio R^3 è un piano (in R^n si dice iperpiano). Coordinate parametriche di una retta. Esempi ed esercizi su rette, piani e loro equazioni in R^3. Introduzione alle combinazioni lineari di vettori. L'insieme delle combinazioni lineari di due vettori non allineati di R^3 è un piano. L'insieme delle combinazioni lineari di due vettori non allineati di R^2 è tutto il piano. Sistemi lineari in due equazioni e due incognite (2x2). Sistemi impossibili, sistemi con infinite soluzioni. Metodi di risoluzione: sostituzione, confronto. Formula di Cramer. Matrici e determinanti 2x2.

I numeri complessi. Somma, prodotto, inverso di numeri complessi. Coniugato. Rappresentazione cartesiana sul piano. La somma corrisponde alla somma di vettori. Rappresentazione in coordinate polari. Formula del prodotto di numero complessi in coordinate polari. Funzione esponenziale complessa introdotta mediante formula di Taylor. Formula di Eulero. Proprietà della funzione esponenziale complessa. Radici complesse dell'unità. Equazioni complesse anche con esponenziale.

Riduzione di Gauss. Sistemi lineari nxm. Mosse di Gauss, scambi di righe. Riduzione: variabili libere, colonne pivot, elementi pivot. Risoluzione di sistemi lineari mediante riduzione di Gauss. Soluzioni speciali. Scrittura dell'insieme delle soluzioni al variare dei termini noti in funzione delle variabili libere e delle soluzioni speciali.

Sistemi lineari, matrici, applicazioni lineari. Interpretazione di un sistema lineare nxm come combinazione lineare di m vettori di R^n. Funzione combinazione lineare (FCL). Span di un insieme di vettori. Un sistema lineare ha soluzione se e solo se il vettore dei termini noti appartiene all'immagine della FCL associata. Un sistema lineare ha al più una soluzione per ogni scelta dei termini noti se e solo se la FCL associata è iniettiva. Definizione formale di matrice. Matrice associata ad un sistema lineare. Applicazione lineare tra spazi euclidei ed equivalenza con le FCL. Un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume sui vettori canonici. Corrispondenza tra matrici, sistemi lineari, e applicazioni lineari tra spazi euclidei.

Algebra delle matrici. Prodotto di una matrice per un vettore come combinazione lineare dei vettori colonna della matrice. La j-esima colonna della matrice associata ad una applicazione lineare è l'immagine del j-esimo vettore canonico. La matrice identità. Il prodotto tra matrici AB come matrice associata alla composizione delle applicazioni lineari corrispondenti. Formula algebrica "riga per colonna" del prodotto fra matrici. Il prodotto fra matrici è associativo ma non è commutativo. Inversa sinistra e inversa destra di una matrice. Matrici invertibili. Il prodotto AB di due matrici invertibili è invertibile e $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. Una matrice 2x2 è invertibile se e solo se il suo determinante det(A)=ad-bc≠0. Calcolo della matrice inversa di una matrice 2x2. Esempi di matrici invertibili: matrici diagonali con tutti gli elementi sulla diagonale non nulli; matrici mosse di Gauss e matrici scambio di righe. Metodo di Gauss-Jordan per il calcolo delle matrici inverse. La matrice ottenuta con il metodo di Gauss-Jordan è effettivamente l'inversa (sia destra che sinistra) della matrice iniziale. Determinante come funzione a valori reali che soddisfa 4 proprietà: le due proprietà di linearità per righe, una matrice con due righe uguali ha determinante 0, il determinante della matrice identità e 1. Esistenza nel caso n=2 e n=3 (regola di Sarrus). Altre proprietà del detrminante: se A ha una riga di zeri allora det(A)=0, scambiando due righe il det cambia segno, le altre mosse di Gauss non cambiano il det, se A è triangolare allora det(A) è il prodotto degli elementi sulla diagonale. A è invertibile se e solo se det(A)≠0. Se A è invertibile, allora det(A) è il prodotto dei pivot con un cambio di segno per ogni scambio di righe nella riduzione, quindi il detrminante è unico. Calcolo del determinante nel caso generale nxn: sviluppo lungo una riga o una colonna. Formula di Binet (solo un cenno alla dimostrazione). Matrici trasposte A^T. Matrici simmetriche. Trasposta del prodotto. Una matrice A è invertibile se e solo se A^T è invertibile, e in questo caso $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$. Una matrice A e la sua trasposta hanno lo stesso determinante. Matrici ortogonali.

Algebra lineare. Nucleo e immagine di una applicazione lineare; corrispondenza con lo spazio nullo e lo spazio delle colonne di una matrice. Il nucleo (spazio nullo) è uguale allo span delle soluzioni speciali. L'immagine (spazio delle colonne) è uguale allo span delle colonne pivot. Un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è {0}. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare (risolubile) è l'insieme delle somme v+x_p dove v è un vettore del nucleo e x_p è una qualunque soluzione particolare fissata. Una soluzione particolare si può trovare ponendo a zero tutte le variabili libere. Per ogni applicazione lineare $T:R^m\text{-->}R^n$ le seguenti proprietà sono equivalenti: (1) T è iniettiva; (2) La matrice associata A ha inversa sinistra; (3) La matrice A non ha variabili libere; in questo caso, necessariamente m≤n. Per ogni applicazione lineare $T:R^m\text{-->}R^n$ le seguenti proprietà sono equivalenti: (1) T è suriettiva; (2) La matrice associata A ha inversa destra; (3) La matrice A ha n pivot; in questo caso, necessariamente m≥n. Una matrice A può essere invertibile solo se è quadrata. Un'applicazione lineare $T:R^n\text{-->}R^n$ è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è biunivoca.

Spazi e sottospazi. Spazi vettoriali. Esempi: spazi euclidei R^n, spazi di polinomi, spazi di matrici. Sottospazi vettoriali. Esempi: iperpiani di R^n per l'origine, nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Lo span di un insieme di vettori è un sottospazio vettoriale, il più piccolo che li contiene. Insieme di generatori di R^n o di un suo sottospazio. Un insieme di vettori genera R^n se e solo se la matrice avente quei vettori come colonne è invertibile a destra. Ogni colonna libera di una matrice appartiene allo span delle colonne precedenti, quindi le colonne pivot generano l'immagine dell'applicazione lineare associata. colonne pivot della sua matrice associata. Vettori linearmente indipendenti: equivalenza delle proprietà (1) ogni vettore non appartiene allo span degli altri; (2) l'unica combinazione lineare uguale a 0 è quella banale. Un insieme di vettori è linearmente indipendente se e solo se la matrice avente quei vettori come colonne è invertibile a sinistra. Base di R^n o di un suo sottospazio come insieme di generatori linearmente indipendenti. Base canonica di R^n. Tutte le basi di R^ncontengono n vettori. Tutte le basi di un sottospazio hanno lo stesso numero di vettori, chiamato dimensione. Metodo del completamento della base. Se W è un sottospazio proprio di R^n allora ha dimensione minore di n. Le soluzioni speciali sono linearmente indipendenti e quindi sono una base del nucleo; di conseguenza il nucleo ha come dimensione il numero delle variabili libere. Le colonne pivot sono linearmente indipendenti e quindi sono una base dell'immagine; di conseguenza l'immagine ha come dimensione il numero delle colonne pivot. Per ogni applicazione lineare $T:R^m \to R^n$ si ha che $\dim(\ker(T))+\dim(\mathrm{Imm}(T))=m$. Intersezione (ma non unione) di sottospazi è sottospazio. Somma V+W di sottospazi. Teorema di Grassman: $\dim(V+W)=\dim(V)+\dim(W)-\dim(V\cap W)$.

Autovettori ed autovalori. Autovettori ed autovalori di una matrice quadrata. Una matrice è diagonalizzabile se e solo se ha una base di autovettori. v è autovettore di autovalore λ se e solo se $A-\lambda I$ non è invertibile. Polinomio caratteristico di una matrice. λ è autovalore se e solo se è radice del polinomio caratteristico. Autospazio di un autovalore. Autovettori relativi ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica. Una matrice quadrata A è diagonalizzabile se e solo se ha tutti autovalori reali aventi uguale molteplicita algebrica e geometrica. Proprietà speciali delle matrici simmetriche: (1) Tutti gli autovalori sono reali; (2) autovettori di autovalori diversi sono perpendicolari, dunque linearmente indipendenti; (3) sono sempre diagonalizzabili (Teorema spettrale, non dimostrato).