$A = (a_{ij})$ $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$

MATRICE $n \times m$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2×3 $n = 2,\ m = 3$

ES $\sum_{j=1}^{m} a_{1j} \cdot v_j = w_1$

$a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots\ a_{1m}v_m$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^m$

$\vec{A} \cdot \vec{v} = \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot v_j = w_i$

$$\underset{n \times m}{A}\ \underset{m \times k}{B} = \underset{n \times k}{C}$$

$$\underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}}$$

$A = (a_{ij})$ $i = 1, n$; $j = 1, m$ $B = (b_{jk})$ $j = 1, m$; $k = 1, \ldots, s$

$A \cdot B = C = (c_{ik})$ $i = 1, n$; $k = 1 \ldots s$ dove $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$

E' il prodotto scalare tra la i-esima riga di A e la k-esima colonna di B.

$f: A \to B$ funzione ha un inversa sx $g: B \to A$

vuol dire che $g \circ f = id_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

$\Updownarrow$

$f: A \to B$ ha inversa dx $g: B \to A$

vuol dire che $f \circ g = id_B$

$B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$

$\Updownarrow$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

f è iniettiva $\qquad\qquad$ f è suriettiva (onto)

Esercizio 8/9/2016 (compito del)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrice 3×2

trovare la sua inversa sinistra B che ha tutti zeri nella II colonna.

$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

In generale:

Esempio: $\qquad T_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$T_A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad T_A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + -3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ +6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ +6 \end{pmatrix}$

B inversa sx di A vuol dire che

$T_B \circ T_A = id_{\mathbb{R}^2}$ $\qquad T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad A$ matrice 3×2

$\qquad\qquad T_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad B$ matrice $= 2\times 3$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^2$

$id_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ è applic. lineare? si, l'applicazione identità è lineare

$T_I\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ MATRICE IDENTITÀ 2×2

$id_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$T_I\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identità 3×3

Es. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$T_A \circ T_{I_3} = T_A$

A 3×2 $\qquad$ B 2×3 $\qquad\qquad$ $B\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$ Generica matrice 2×3 che ha tutti zeri nella II colonna

$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad T_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T_A \circ T_B = id_{\mathbb{R}^2}$ $\qquad \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$B \cdot A = I_2$

$2\times 3 \quad 3\times 2 = 2\times 2$

$$\begin{cases} a\cdot 1 + 0\cdot 3 + b\cdot 0 = a = 1 \\ a\cdot 3 + 0\cdot 0 + b(-2) = 3a - 2b = 0 \to 2b = 3a \Rightarrow b = \frac{3}{2} \\ c\cdot 1 + 0\cdot 3 + d\cdot 0 = c = 0 \\ c\cdot 3 + 0\cdot 0 + d(-2) = 3c - 2d = 1 \Rightarrow -2d = 1 \Rightarrow d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Verifica: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio compito 6/6/2016

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Trovare l'inv. dx che ha tutti zeri nella seconda riga

$B = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix}$

$T_A \circ T_B = Id_{\mathbb{R}}$

$2\times3 \quad 3\times2 \quad 2\times2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 0 - c = 1 \to -2a = c+1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ -2b + 0 - d = 0 \to -2b = d \Rightarrow b = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6} \\ 0 \quad 0 \quad +3c = 0 \to c = 0 \\ 0 \quad 0 \quad +3d = 1 \to d = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} -1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Verifica: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Trovare 4 numeri t.c la media di 3 di loro + il 4° è uguale a 6, 8, 10, 12.

Cerco x_1, x_2, x_3, x_4 tali che:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + x_4 = 6 \qquad \frac{x_1 + x_3 + x_4}{3} + x_2 = 10$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_4}{3} + x_3 = 8 \qquad \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} + x_1 = 12$$

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 18 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 24 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 30 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 36 \end{cases}$$

La matrice associata è: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$T_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\cancel{= \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 30 \\ 36 \end{pmatrix}\right\} \in Im\, T_A}$

Il sistema $(*)$ ha soluzione $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 30 \\ 36 \end{pmatrix} \in Im\, T_A = Col(A)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 18 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 24 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 30 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III - I \\ IV - 3I}]{II - I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow[II\ e\ III]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & -18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{IV + II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{IV + III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 18 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 18 \\ 2x_2 - 2x_4 = 12 \\ 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ -12x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = 0$

$2x_3 - 2x_4 = 2x_3 = 6 \Longrightarrow x_3 = 3$

$2x_2 - 2x_4 = 2x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 6$

$x_1 + 6 + 3 + 3x_4 = 18$

$x_1 + 3x_4 = 9$

$x_1 = 9$

$\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ cioè $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\}$ generano $\mathbb{R}^2$

$\Updownarrow$

$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - cb \neq 0$

Dim $\Downarrow$ Se per assurdo $ad - bc = 0$, e quindi $ad = bc$,

allora $d \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ perché $\begin{pmatrix} a \cdot d \\ d \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot c \\ b \cdot d \end{pmatrix}$

Esempi:

$\det\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = (-3)(-4) - (6 \cdot 2) = 12 - 12 = 0.$

$-4\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Non possono generare tutto $\mathbb{R}^2$, perché sono uno multiplo dell'altra.

Conclusione: I vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ hanno la stessa direzione, quindi il loro Span è una retta

$\Uparrow$ Dobbiamo dimostrare che ogni vettore $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, cioè esistono x e y t.c

$x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

~~Esempio~~

Ad esempio: $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ perché $\det\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix} \neq 0$

$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ per opportuni x e y $\Leftrightarrow$

$\cancel{\begin{cases} ax + cy = \alpha \\ bx + dy = \beta \end{cases}}$

$$\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}^\circ + 3\text{I}^\circ]{\text{Riduzione}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 17 \end{array}\right) \quad \begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 7y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2\left(\frac{17}{7}\right) = 5 \\ y = \frac{17}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} -x + \frac{34}{7} = 5 \\ y = \frac{17}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} -x = 5 - \frac{34}{7} \\ y = \frac{17}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} -x = \frac{35}{7} - \frac{34}{7} \\ y = \frac{17}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = \frac{17}{7} \end{cases}$$

In generale:

supponiamo $a \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & \alpha \\ b & d & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II} - \frac{b}{a}\text{I}]{} \left(\begin{array}{cc|c} a & c & \alpha \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & \beta - \frac{b}{a}\alpha \end{array}\right)$$

Ho finito, la soluzione c'è purché $d - \frac{bc}{a} \neq 0$ cioè $ad - bc \neq 0$.

$$\begin{cases} ax + cy = \alpha \\ \left(d - \frac{b}{a}c\right)y = \beta - \frac{b}{a}\alpha \end{cases} \quad y = \frac{\beta - \frac{b}{a}\alpha}{d - \frac{bc}{a}} = \frac{\frac{a\beta - b\alpha}{\cancel{a}}}{\frac{ad - bc}{\cancel{a}}} = \frac{a\beta - b\alpha}{ad - bc}$$

$$= \frac{\det\begin{pmatrix}a & \alpha\\ b & \beta\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}}$$ (formule di Cramer)

• Def1. $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice applicazione lineare se $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\cancel{T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} \text{ dove } \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3}$

esistono m vettori $\vec{w}_1 \dots \vec{w}_m \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_m\end{pmatrix} = x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{w}_2 + \dots + x_m \cdot \vec{w}_m$$

• Def2: $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice applicazione lineare se

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^m \quad T(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot T(\vec{v})$

(2) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^m \quad T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(v_2)$

esempio: $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\7\end{pmatrix}$$

VI

$$T\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\\-8\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-8\\-14\end{pmatrix}$$ è lo stesso

risultato di prima moltiplicato per -2.

Prendendo il vettore $\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\\-8\end{pmatrix}$ che è $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ moltiplicato per -2, si ottiene un'immagine che è la precedente moltiplicata per -2.

$$T\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\5\\3\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{V_2}} = -2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-1\\4\end{pmatrix} \quad T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

Prima abbiamo visto che se $\vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ allora $T(\vec{v_1}) = \begin{pmatrix}6\\4\\7\end{pmatrix}$.

$$\vec{V_1} + \vec{V_2} = \begin{pmatrix}-1\\7\\6\\3\end{pmatrix} \Rightarrow T\begin{pmatrix}-1\\7\\6\\3\end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\5\\3\\-1\end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix}6\\4\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\-1\\4\end{pmatrix}}_{T(\vec{V_1}) + T(\vec{V_2})} = \begin{pmatrix}-1\\3\\11\end{pmatrix}$$

• Def1 ⟹ Def2

(1) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{V} = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

$$T(\lambda\vec{V}) = T\left[\lambda\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\vdots\\\lambda x_m\end{pmatrix} = (\lambda x_1)(\vec{w_1}) + \dots (\lambda x_m)(\vec{w_m}) =$$
$$\lambda[x_1\vec{w_1} + \dots x_m\vec{w_m}] = \lambda \cdot T\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{pmatrix} = \lambda \cdot T(\vec{V})$$

(2) $\vec{V_1} = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}$ e $\vec{V_2} = \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$

$$T(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = T\begin{pmatrix}x_1 + y_1\\\vdots\\x_m + y_m\end{pmatrix} = (x_1 + y_1)\vec{w_1} + \dots (x_m + y_m)\vec{w_m} = x_1\vec{w_1} + y_1\vec{w_1} + \dots + x_m\vec{w_m} + y_m\vec{w_m} =$$
$$= (x_1\vec{w_1} + \dots + x_m\vec{w_m}) + (y_1\vec{w_1} + \dots y_m\vec{w_m}) =$$
$$= T\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_m\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix} = T(\vec{V_1}) + T(\vec{V_2})$$

esempio: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x + 2z\\2x + y + 3z\\x - 3y + 5z\end{pmatrix}$$ ← Questa è un app. lineare perché

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$$

Esempio: $T\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\16\\36\end{pmatrix}$

esempio: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che NON è appl. lineare

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x - y\\x^2 + y\end{pmatrix}$$ ← Questa non è un'app. lineare, infatti:

$T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ e si ha $T\left(-1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} \neq -1 \cdot T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Matrice associata
$$A_T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\2 & 1 & 3\\1 & -3 & 5\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}x + 2z = \alpha\\2x + y + 3z = \beta\\x - 3y + 5z = \gamma\end{cases} \qquad A \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

(1) $T\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$T\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x + 2\lambda z\\2\lambda x + \lambda y + 3\lambda z\\\lambda x - 3\lambda y + 5\lambda z\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\lambda(x + 2z)\\\lambda(2x + y + 3z)\\\lambda(x - 3y + 5z)\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x + 2z\\2x + y + 3z\\x - 3y + 5z\end{pmatrix} = \lambda \cdot T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

2) $\vec{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{V_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$T(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = T(\vec{V_1}) + (\vec{V_2})$

$T(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} (x_1+x_2) + 2(z_1+z_2) \\ 2(x_1+x_2) + (y_1+y_2) + 3(z_1+z_2) \\ (x_1+x_2) - 3(y_1-y_2) + 5(z_1+z_2) \end{pmatrix}}$

$T(\vec{V_1}) + T(\vec{V_2}) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} x_1 + 2z_1 \\ 2x + y_1 + 3z_1 \\ x_1 - 3y_1 + 5z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + 2z_2 \\ 2x_2 + y_2 + 3z_2 \\ x_2 - 3y_2 + 5z_2 \end{pmatrix}}$

I due risultati sono uguali

esempio

$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ 2x + y + 3z \\ 1x - 3y + 5z \end{pmatrix}$

Vedremo più avanti che Def 2 $\Rightarrow$ Def 1, e quindi Def. 1 e Def. 2 sono EQUIVALENTI

$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{2}{=} T\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + T\left(y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + T\left(z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{1}{=}$

$= x\,T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\,T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\,T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Numeri complessi

$i^{-2} = -1$

$\mathbb{R}$ i

si scrivono $a + ib$ $\quad a + b \in \mathbb{R}$ $\quad$ Esempio: $\pi + 4i$

- a = parte reale $= Re(z)$
- b = parte immaginaria $= Im(z)$

Esempio $(3-4i)(5+2i) = 15 + 6i - 20i - 8i^2 = 15 - 14i + 8 = 23 - 14i$

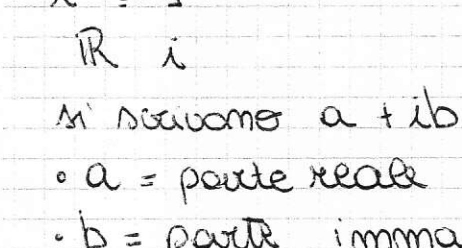
$i^2 = -1$
$i^3 = i \cdot i^2 = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

- congruenza modulo ~~quadrato~~ quattro

$i^{2147} = i^3 = -i$

$$\begin{array}{r|l} 2147 & 4 \\ \cline{2-2} 14 & 536 \\ 27 & \\ 3 & \end{array}$$

$(3+5i) + (3-4i) = 6 + i$



$(3+5i)$

Si possono rappresentare sul piano cartesiano

$z = a + ib \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$w = c + id$

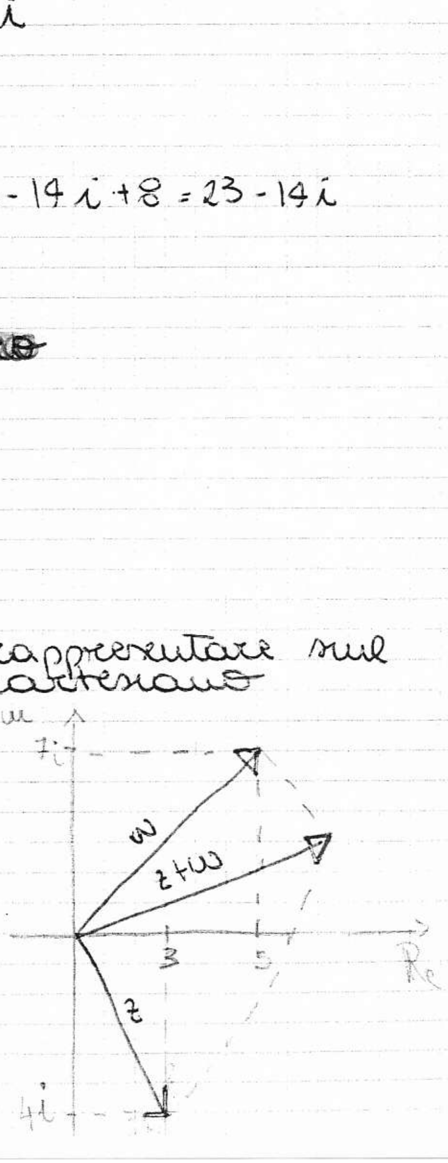
$z + w = (a+c) + i(b+d)$

Esempio:

$z = 3 - 4i$

$w = 5 + 7i$

$z + w = 8 + 3i$

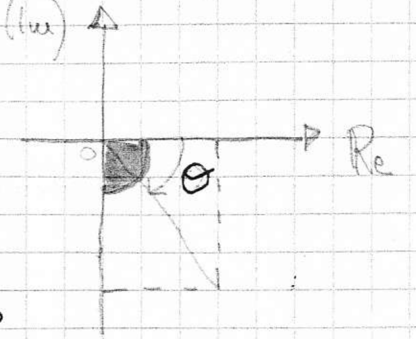


$z + w = (a+c) + i(b+d)$

$\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

$z \longmapsto (a+ib)$ (FORMA cartesiana)
$z \longmapsto (\rho : \theta)$ (FORMA POLARE)

$z = 3-4i$



$tg\,\theta = -\frac{4}{3}$

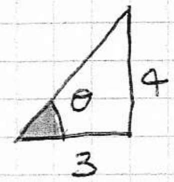
$\theta = -arctg\,\frac{4}{3}$

ρ = distanza dall'origine
= "modulo" di z

modulo $= \|3-4i\| = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right\|$

$= \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$\theta = -arctg\,\frac{4}{3}$



$tg\theta = \frac{4}{3}$
$\theta = arctg\,\frac{4}{3}$

"argomento"

· Prodotti di numeri complessi

$z_1 \longmapsto (\rho : \theta)$
$z_2 \longmapsto (\rho : \theta)$
$z_1 + z_2 \longmapsto (\rho_1 \cdot \rho_2 , \theta_1 + \theta_2)$ gli angoli si sommano e i moduli si moltiplicano

$z = \sqrt{3} + i$

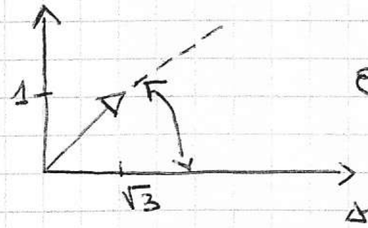
$W = 2 - 2\sqrt{3}i$

~~$z \cdot w = 2\sqrt{3} - 6i + 2i - 2\sqrt{3}i^2 = 4\sqrt{3} - 4i$~~

$z \cdot w = 2\sqrt{3} - 6i + 2i - 2\sqrt{3}i^2 = 4\sqrt{3} - 4i$

$\|z\| = \sqrt{3+1} = 2$

$\|w\| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$



$\theta = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} = 30°$

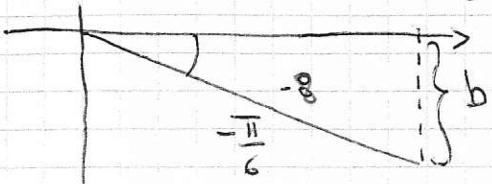
$\theta = arctg\,\frac{-2\sqrt{3}}{2} = -arctg\,\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

$z \longmapsto (2 ; \frac{\pi}{6})$

$w \longmapsto (4 ; -\frac{\pi}{3})$

Calcoliamo ora il prodotto usando coordinate polari:

$z \cdot w \longmapsto (8 ; \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = (8 ; -\frac{\pi}{6})$



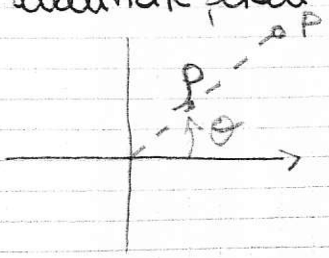
$\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases}$ $= a = 8\cos(-\frac{\pi}{6})$
$= b = 8\sin(-\frac{\pi}{6})$

$4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{2}$

$-4 = 8\left(-\frac{1}{2}\right) = a + ib = 4\sqrt{3} - 4i$

Numeri complessi

Coordinate polari



ρ = distanza da o (MODULO)

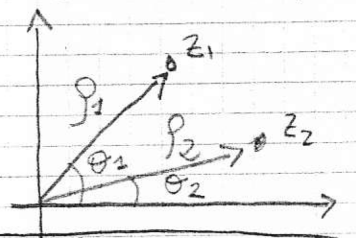
θ = angolo formato con l'asse x (ARGOMENTO

$z = a + ib \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Coordinate cartesiane $\rightsquigarrow$ coordinate polari $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases}$

Coordinate polari $\rightsquigarrow$ " " cartesiane $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$

Prodotto tra numeri complessi, messi in forma polare



$z_1 = (\rho_1 \cos\theta_1) + i(\rho_1 \sin\theta_1)$

$z_2 = (\rho_2 \cos\theta_2) + i(\rho_2 \sin\theta_2)$

$\cos(\alpha+\beta) =$
$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) =$
$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + i\rho_1\rho_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 +$
$i(\rho_1\rho_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2) - \rho_1\rho_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2$

$\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) +$
$i\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)$

$\rho_1\rho_2\cos(\theta_1+\theta_2) + i\rho_1\rho_2\sin(\theta_1+\theta_2)$ → MODULO $\rho_1\rho_2$ → ARGOMENTO $\theta_1+\theta_2$

$z_1 = \sqrt{3}+i$ $\quad z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i$

$\rho_1 = 2$ $\quad \rho_2 = 4$ $\quad \Longrightarrow$ $z_1 \cdot z_2$

$\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ $\quad \theta_2 = -\frac{\pi}{3}$

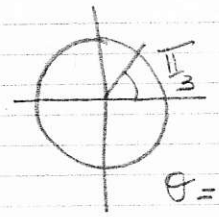
MODULO 8
ARGOMENTO $-\frac{\pi}{6}$

$8\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 8\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$4\sqrt{3} - 4i$

Calcolo di potenze

$z = 1 + \sqrt{3}i$ → $\rho = 2$, → $\theta = \frac{\pi}{3}$



$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1}$

$z^{100} \rightsquigarrow \rho = 2^{100}$
$\theta = 100 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{100}{3}\pi =$

$\frac{96+4}{3}\pi = 32\pi + \frac{4}{3}\pi \sim \frac{4}{3}\pi$

$z^{100} = 2^{100}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = 2^{100}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Es. $(-i)^{2135} = -\left(i^{2135}\right) =$

$$\begin{array}{r|l} 2135 & 4 \\ 13 & 533 \\ 15 & \\ 3 & \end{array}$$

$\to (3 \cdot 2) + 5 = 11 / 4 = 8$ RESTO 3

$= -(i^3) = i$

$-i \to \rho = +1$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$(-1)^{2135} \to \rho = 1^{2135} = 1$, $\theta = 2135\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2135\,\pi}{2}$

$\frac{533 \cdot 4 + 3}{2}\pi = -533 \cdot (2\pi) - \frac{3}{2}\pi \sim -\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Quindi $(-i)^{2135} = i$

Divisioni

$(7+i) : (3+4i) = (7+i) \cdot \frac{1}{(3+4i)}$

Come si trova l'inverso di un numero complesso $z \neq 0$?

$3+4i = z \qquad \frac{1}{3+4i} = w \qquad w \cdot z = 1$

$w \cdot z \to \rho \cdot \tilde{\rho} = 1$, $\theta + \tilde{\theta} = 0$

L'inverso ha modulo $\tilde{\rho} = \frac{1}{\rho}$
e argomento $\tilde{\theta} = -\theta$

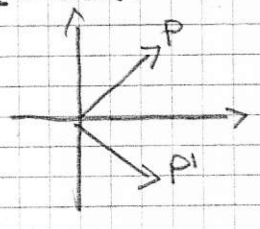
Es. $1 + \sqrt{3}i \qquad \rho = 2 \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$\frac{1}{z} \to \rho = \frac{1}{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

Verifica: $(1+\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4} = 1$

$\bar{z}$ CONIUGATO DI $z = a + ib \to \bar{z}\ a - ib$



$z \rightsquigarrow (\rho, \theta)$

$\bar{z} \rightsquigarrow (\rho, -\theta)$

$z \cdot \bar{z} \to (\rho^2, 0)$

$z \cdot \bar{z} = \rho^2$

$\underbrace{(a+ib)}_{z}\underbrace{(a-ib)}_{\bar{z}} = a^2 + b^2$

z moltiplicato per il suo coniugato $\bar{z}$ è uguale al quadrato del modulo.

$\frac{1}{1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+3} = \frac{1-\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

$\frac{4-5i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{4-4i-5i-5}{1+1} = \frac{-1-9i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2}i$

Esercizio.

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dove $T(x,y,z) = (2x+3y+5z, x+2y+z, y-3z)$

T è iniettiva? Suriettiva?

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \, z\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$ APPL LINEARE

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$ matrice associata a T

T suriettiva $\iff$ il sist. lineare $\begin{cases} 2x+3y+5z = a \\ x+2y+z = b \\ y-3z = c \end{cases}$

ha soluz. per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, cioè esiste $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

tale che $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\iff \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3$$

cioè i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ generano tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$

Più in generale,

$\begin{cases} 2x+3y+5z = a \\ x+2y+z = b \\ y-3z = c \end{cases}$ ha soluz. $\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}\,T$, cioè esiste $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ t.c

$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$ cioè

esiste una combinazione lineare

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che:

Def. $\text{Im}\,T = \left\{ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \mathbb{R}^n$

$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ applicazione lineare

PROP. $\text{Im}(T) = \text{Span}\{T(e_1), \dots, T(e_m)\} = \text{Span}\{$colonne della matrice associata $A\} = \text{Col}(A)$

Per questo Im(T) si chiama anche SPAZIO delle COLONNE (della matrice associata)

DIM $\text{Im}(T) \subseteq \text{Span}\{T(e_1) \dots T(e_n)\}$

Prendo $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} \in \text{Im}\,T$, dunque $\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ t.c $T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = T\left(x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots + x_m\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$ (per le prop. di applicaz. lineare)

$$= x_1 \cdot T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m \cdot T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Span}\{T(e_1), T(e_2), \dots T(e_m)\}$$

$$\text{Span}\{T(e_1), T(e_2) \dots T(e_m)\} \subseteq \text{Im}(T)$$

Prendo $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \text{Span}\{T(e_1), T(e_2) \dots T(e_m)\}$, cioè

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot T(e_1) + x_2 \cdot T(e_2) + \dots + x_m \, T(e_m) =$ (usando le proprietà (1) e (2) delle app. lineari) $=$

$T(x_1 \cdot e_1 + \dots x_m \vec{e}_m) \in \text{Im}\, T$

Torniamo all'esercizio

$\text{Im}\,T = ?$ $\text{Span}\left\{T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$

SPAZIO DELLE COLONNE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & 1 & -3 & c \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & 3 & 5 & a \\ 0 & 1 & -3 & c \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}-2\text{I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & -1 & 3 & a-2b \\ 0 & 1 & -3 & c \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{II}}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & -1 & 3 & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} P & P & L \end{array} \end{array}$$

- COLONNE PIVOT = P
- COLONNA LIBERA = L

$$\begin{cases} x + 2y + z = b \\ -y + 3z = a - 2b \\ 0 = a - 2b + c \end{cases}$$

Ha soluzione $\iff a - 2b + c = 0$

Dunque $\text{Im}\,T = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \, a - 2b + c = 0\right\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (COLONNE PIVOT)

$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ appl. lineare si può definire in 2 modi equivalenti:

(1) esistono $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m \in \mathbb{R}^n$ t.c. $T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \vec{w}_1 + \dots + x_m \vec{w}_m = \sum_{i=1}^{m} x_i \vec{w}_i$

(2) (i) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^m \quad T(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \, T(\vec{v})$

(ii) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^m \quad T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$

$T\vec{0} = \vec{0}$ segue direttamente da (1), infatti $T\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{w}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{w}_m = \vec{0}$.

Per dimostrare questa proprietà da (2), si può procedere così:

1) Prendo $\vec{v}$ e $-\vec{v}$ dove $\vec{v}$ è un vettore qualunque

$T(\vec{0}) = T(\vec{v} - \vec{v}) = T(\vec{v}) + T(-\vec{v}) = T(\vec{v}) - T(\vec{v}) = \vec{0}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se è lineare} \\ T(2\vec{v} + 3\vec{w}) = 2 \cdot T(\vec{v}) + 3 \cdot T(\vec{w}) = \end{array}}$$

2) $\underset{\parallel}{T}(2 \cdot \vec{0}) = 2 \cdot T(\vec{0}) \iff T(\vec{0}) = 0$ Infatti $\vec{v} = 2\vec{v} \Downarrow \vec{v} = \vec{0}$

$T(\vec{0})$

IMPORTANTE se $T(\vec{0}) \neq \vec{0}$

allora T non è applic. lineare

$T \; \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineare

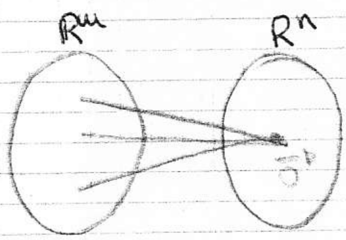
- $\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\{T(e_1) \dots T(e_n)\}$

Teorema:

$T \; \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineare è iniettiva $\iff \ker T \{\vec{0}\}$

kernel $(T) = \{\vec{v} \mid T(\vec{v}) = 0\} = T^{-1}(\{0\})$

NUCLEO



$\ker T = \{\vec{0}\}$

(nel nucleo di T c'è solo il vettore $\vec{0}$)

Dim $\Rightarrow$

Ipotesi: T. lineare iniettiva

Tesi: $\ker T = \{\vec{0}\}$

Vero perché altrimenti avrei $\overset{\text{un vettore}}{\vec{v}} \neq \vec{0}$ t.c. $T(\vec{v}) = 0 = T(\vec{0})$

e T non sarebbe iniettiva

$\Leftarrow$

Ipotesi $\ker T = \{\vec{0}\}$ Tesi è iniettiva

Supponiamo $T(v_1) = T(v_2)$. Devo mostrare che allora $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

$T(v_1) = T(v_2) \iff T(\vec{v}_1) - T(\vec{v}_2) = \vec{0}$, cioè $T(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}$

cioè $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in \operatorname{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$. Ma allora $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}$, cioè $v_1 = v_2$

CONSEGUENZA. Se devo verificare che un'applicazione lineare T è iniettiva, basta controllare che $\ker T = \{\vec{0}\}$, cioè che vale l'implicazione $T(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Esercizio

$T(x, y, z) = (2x + y, -y + z, 2x - y + 2z)$

T lineare?

Si perché $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

VETTORI DELLA BASE CANONICA di $\mathbb{R}^3$

La matrice associata

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ si trova mettendo come colonne $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$

- $\operatorname{Im}(T) = ?$ • $\ker T = ?$

$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

$(*) \begin{cases} 2x + y = a \\ -y + z = b \\ 2x - y + 2z = c \end{cases}$

- $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T \iff$ il sistema $(*)$ ha soluzioni

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker T \iff T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$, cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è soluzione di $(*)$ dove i termini noti sono $a = b = c = 0$.

Quindi, T iniettiva $\iff \ker T = \{\vec{0}\} \iff$ l'unica soluzione di $(*)$ è $x = 0, y = 0, z = 0$.

dove $a = b = c = 0$

T iniettiva $\Rightarrow$ Per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ esiste <u>al max una soluzione</u> $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ del sist $(*)$

T suriettiva $\iff \operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3 \iff$ per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ il sistema $(*)$ ha <u>almeno 1</u> soluzione

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - I} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - 2II} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{ccc} p & p & l \end{array}$

colonna libera

colonne PIVOT

L'immagine è generata dalle colonne PIVOT, in questo caso (della matrice iniziale)

$\operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non serve quando considero le combinazioni lineari dei vettori colonna della matrice

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ogni COLONNA LIBERA è combinazione lineare delle colonne PIVOT precedenti

Domanda: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$? Sì

Devo trovare λ, μ t.c. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 0 \\ -\mu = 1 \\ 2\lambda - \mu = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \\ \mu = -1 \\ 2\lambda = 2\mu = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Visto che $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ allora $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} =$

$\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Conclusione: 2 colonne pivot $\Rightarrow$ dimensione immagine è 2

Base dell'immagine $\mathcal{B} = \{\text{COLONNE PIVOT}\}$

cioè, nel nostro caso $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Nucleo: colonne libere: solo una, la III°

Variabili libere: x_3

$\boxed{\dim \ker = 1}$ La dimensione del nucleo è uguale al numero delle colonne libere

T non è iniettiva perché $\ker T \neq \{0\}$.

T non è suriettiva perché l'Im ~~T~~ ~~...~~ non è tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$, visto che ha dimensione 2.

Come si trova $\ker T$?

Si prende il sistema "ridotto" Abbiamo una sola variabile libera, cioè x_3.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad = 0 \\ \quad - x_2 + x_3 = 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \end{cases}$$

Poniamo $\boxed{x_3 = 1}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + 1 = \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{array} \qquad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE SPECIALE

$\ker T = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ dimensione 1

Verificare che $\ker T = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\lambda \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad = 0 \\ \quad -x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(-1/2\lambda) + \lambda = 0 \\ -\lambda + \lambda = 0 \\ 2(-1/2\lambda) - \lambda + 2(\lambda) = 0 \end{cases}$$

OK

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 4x+y+2z=6 \\ x+2y+(a^2-19)z=a \end{cases}$$

Quante soluzioni (x,y,z) ci sono a seconda di come scelgo $\underline{\underline{a}}$

BERARDUCCI Esercitazione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & (a^2-19) & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \underbrace{(a^2-16)}_{(a+4)(a-4)} & a-4 \end{array}\right) \xrightarrow{II-4I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & (a+4)(a-4) & a-4 \end{array}\right)$$

Caso 1

se $a \neq \pm 4 \Rightarrow a^2-16 \neq 0 \Rightarrow$ esiste ed unica soluzione (ci sono 3 colonne pivot)

$z = \dfrac{a-4}{a^2-16} = a+4$ $\qquad x = 4-2y+3z \Rightarrow$

$x = 4 - 4a - \dfrac{132}{7} + 3(a+4) = -a+16-\dfrac{132}{7} = -a-\dfrac{20}{7}$

$-7y = -14z - 10$

$y = \dfrac{-14z-10}{-7} = 2z + \dfrac{10}{7} = 2(a+4) + \dfrac{10}{7} = 2a + \dfrac{66}{7}$

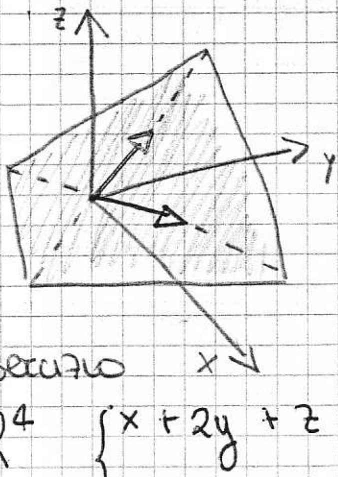
Caso $a=-4$? nessuna soluzione. Caso $a=4$ infinite soluzioni: ∞^1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} — & — & — & — \\ — & — & — & — \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$0z = 0$

dimensione $= 1$

Sottospazi vettoriali = Span di alcuni vettori



$\mathbb{R}^3$

Esercizio

$\mathbb{R}^4$ $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x-y+3t=0 \end{cases}$ $\quad (x,y,z,t)$ $\quad$ matrice $\rightarrow$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{II+I} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ P & P & L & L \end{array} \end{array}$$

t: libera

z: libera

$$\xrightarrow{I - 2II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x - z - 6t = 0 \\ y + z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array}$$

$$\begin{cases} y = -z - 3t \\ x = z + 6t \end{cases}$$

soluzioni sono della forma

$$\begin{pmatrix} z + 6t \\ -z - 3t \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +6t \\ -3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Span}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dunque il sottospazio

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y + 3t = 0 \end{cases} \right\}$$

è $V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, ha dimensione 2

---

esercizio

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$f\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) ? \quad \exists\, x, y \text{ t.c. } \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ?$$

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + 3y = 13 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 13 \\ 3 & 4 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{III - (II + I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 13 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II - 2I} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{III - II} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

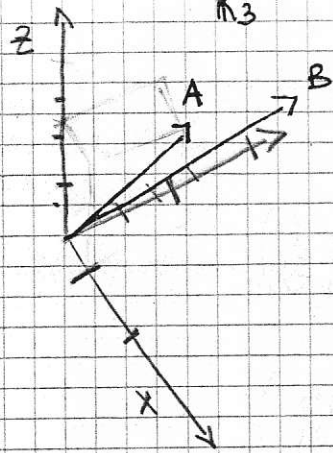
$y = 3$

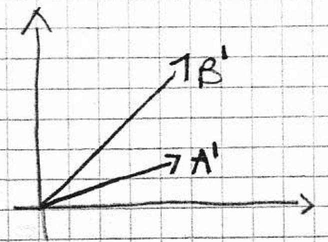
$x = -2y + 8 = 2$

Quindi $2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix}$

e perciò $\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathbb{R}_3$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^2$





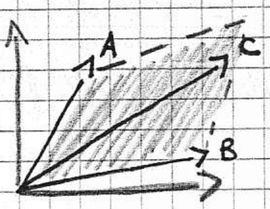
per le proprietà di appl. lineare

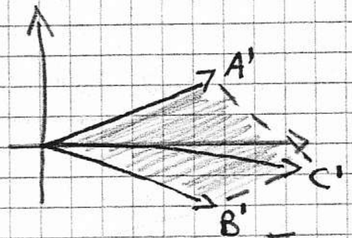
$$f\begin{pmatrix}8\\13\\18\end{pmatrix} = f\Big(\underbrace{2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{3\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}}_{B}\Big)_{C} = 2f\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) + 3f\left(\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right)$$

$$= 2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\14\end{bmatrix}$$

Esercizio

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$





Esercizio

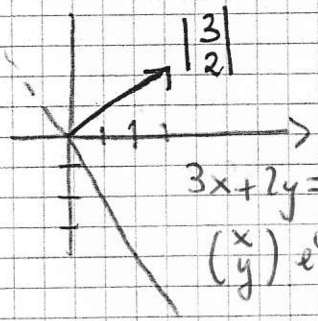
$3x + 2y = 0$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Esercizio in $\mathbb{R}^3$

$$\text{retta}\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

È l'intersezione di 2 piani.



$3x + 2y = 0 \iff$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ è perpendicolare a $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Esercizio

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare

$$f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6\\8\\10\end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}10\\14\\18\end{pmatrix}$$

$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = ?$ $\qquad$ Matrice di $f = ?$

come trovo la matrice $A = (a_{ij})$ t.c.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \; ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 14 & 4 & 3 \\ 18 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$ è la matrice le cui colonne sono $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} f\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\8\\10\end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}}\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

Allora $$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 3 & 2\\14 & 4 & 3\\18 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10+3+2\\14+4+3\\18+5+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\21\\27\end{pmatrix}$$

$\boxed{2° \text{ soluzione}}$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2} f\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\8\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\14\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\21\\27\end{pmatrix}$$

Esercizio

$L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

FUNZIONE LINEARE CON MATRICE ASSOCIATA A

Calcolare $\ker L_A = ?$

" $\quad \operatorname{Im} L_A = ?$

~~ker(LA)~~

MATRICI INVERSE

Def. B è inversa dx (o sin) di A se $AB = I$ (oppure $BA = I$)

si dice INVERTIBILE se ha inversa A^{-1}

A^{-1} è INVERSA di A se $A^{-1} A = I$ e $A \cdot A^{-1} = I$

A ha inversa dx B $\iff BA = I \iff f_B \circ f_A = id \iff f_A$ è iniettiva

applicazioni lineari associate

- A ha inversa dx B $\iff AB = I \iff f_A \circ f_B = id \iff f_A$ è suriettiva
- A è invertibile $\iff f_A$ è biunivoca

PROPRIETÀ

1) Se A ha inv dx B e inversa sx C, allora $B = C$ e quindi A è invertibile dove $A^{-1} = B = C$

DIM Supponiamo $AB = I$ e $CA = I$ Allora

$$C = C \cdot I = C(A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = IB = B$$

2) A invertibile $\Rightarrow$ A è quadrata

$A_{n \times m}$

B inversa dx $\qquad \underset{n \times m}{A} \cdot \underset{m \times n}{B} = \underset{n \times n}{I}$ $\qquad$ IN SOSPESO

?

B inversa sx $\qquad \underset{m \times n}{B} \cdot \underset{n \times m}{A} = \underset{m \times n}{I} \Rightarrow m = n$

Vedremo che:

- $n < m \Rightarrow$ non ha inv. sinistra

$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ f_A NON è INIETTIVA

- $n > m \Rightarrow$ non ha inv. destra

3) A e B invertibili $\Rightarrow A \cdot B$ invertibile

DIM

$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ Infatti

$$(B^{-1} \cdot A^{-1})(A \cdot B) = B^{-1}(A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I \quad e$$

$$(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

Esercizio

Vale il viceversa?

Cioè è vero o no che $A \cdot B$ invertibile ?

$\Downarrow$

A e B sono invertibili

(A, B matrici $n \times n$)

Perché le matrici invertibili sono utili?

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

SISTEMA LINEARE

Se A è invertibile, se diciamo $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \iff \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

$A\vec{x} = \vec{b}$, moltiplica a sx per A^{-1}, $A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$

$(A^{-1} \cdot A)\vec{x}$

$I\vec{x} = \vec{x}$

Esempio

$$\begin{cases} ax_1 = d_1 \\ bx_2 = d_2 \\ cx_3 = d_3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad A \cdot \vec{x} = \vec{d}$$

MATRICE DIAGONALE

A è invertibile?

Una matrice diagonale D è invertibile $\iff$ tutti gli elementi sulla diagonale sono $\neq 0$

~~Se ... la matrice è invertibile~~

In questo caso D^{-1} è la matrice diagonale dove gli elementi sulla diagonale sono gli inversi di quella di D

$$A = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}, \text{ Infatti } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A\vec{x} = d \iff x = A^{-1}\vec{d}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1/a \\ d_2/b \\ d_3/c \end{pmatrix}$$

METODO DI GAUSS-JORDAN (per determinare la inversa di una matrice)

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} +2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se so risolvere $\vec{A} \cdot \vec{V_1} = e_1$, $A\vec{V_2} = e_2$, $A\vec{V_3} = e_3$

allora so risolvere <u>SEMPRE</u> $A \cdot \vec{X} = \vec{b}$ per ogni $\vec{b}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 + b_3 \cdot e_3 = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot \vec{x} = b$

Se prendo $\vec{x} = b_1\vec{V_1} + b_2\vec{V_2} + b_3\vec{V_3}$

$A\vec{x} = A(b_1\vec{V_1} + b_2\vec{V_2} + b_3\vec{V_3}) = b_1(A \cdot \vec{V_1}) + b_2(A \cdot \vec{V_2}) + b_3(A \cdot \vec{V_3})$

$= b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{b}$

Risolvo "contemporaneamente" $A\cdot\vec{x}=\vec{e_1}$, $A\cdot\vec{x}=\vec{e_2}$, $A\vec{x}=\vec{e_3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1]{II+\frac{1}{2}I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2]{III+\frac{2}{3}II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3]{II+\frac{3}{4}III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_4]{I+\frac{2}{3}II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_5]{\frac{1}{2}I,\ \frac{2}{3}II,\ \frac{3}{4}III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right)$$

MATRICE DIAGONALE $\qquad \underbrace{\quad}_{I} \ \underbrace{\quad}_{B}$

matrice inversa $B=A^{-1}$

$A\cdot\begin{pmatrix}3/4\\1/2\\1/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ cioè $x_1=3/4$, $x_2=1/2$, $x_3=1/4$ soluzione di $A\vec{x}=\vec{e_1}$

$A\cdot\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ cioè $x_1=1/2$, $x_2=1$, $x_3=1/2$ soluzione di $A\vec{x}=\vec{e_2}$

$A\cdot\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\3/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ cioè $x_1=1/4$, $x_2=1/2$, $x_3=3/4$ soluzione di $A\vec{x}=\vec{e_3}$

$$B=\left(\begin{array}{c|c|c} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\left[A\begin{pmatrix}3/4\\1/2\\1/4\end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix} \middle| A\cdot\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\3/4\end{pmatrix}\right]=A\cdot B$$

Quindi B è inversa dx di A. Resta da vedere che B è anche inversa sx

Matrici delle mosse di Gauss

Esempio

$$\begin{array}{l} II+3I \\ III-2I \end{array} \quad \underset{A}{\begin{pmatrix}1&3&5\\-3&1&4\\2&2&1\end{pmatrix}} \longmapsto \underset{A'}{\begin{pmatrix}1&3&5\\0&10&19\\0&-4&-9\end{pmatrix}} \qquad E\cdot A=A'$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\3a_{11}+a_{21}&3a_{12}+a_{22}&3a_{13}+a_{23}\\-2a_{11}+a_{31}&-2a_{12}+a_{32}&-2a_{13}+a_{33}\end{pmatrix}$$

$E\cdot A$ è la matrice che si ottiene da A rimpiazzando la II riga con $II+\lambda I$ e rimpiazzando la III riga con $III+\mu I$

In generale

$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\\lambda&1&0\\\mu&0&1\end{pmatrix}$ le matrici di questo tipo sono invertibili

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\\lambda&1&0\\\mu&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\lambda&1&0\\-\mu&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto che effettuando le 5 mosse di Gauss $E_1, \dots, E_5$ si ottiene:

$$E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$$

Se chiamo $E = E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$, abbiamo:

(1) $E \cdot A = I$

Prima avevamo dedotto che (2) $A \cdot B = I$

(1) $E \cdot A = I$

(2) $A \cdot B = I$

$\Downarrow$

$E = B = A^{-1}$

Esempio

Scambio II e III riga

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$E \cdot E = I$

Domanda

$A \cdot A = I \Longrightarrow A = I$? NO

Inversa di una matrice 2x2 $\qquad ab - bc \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{supponiamo} \\ (a \neq 0)}]{II - \frac{c}{a} I} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{c}{a} \cdot b & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \quad I - \frac{b \cdot a}{ad - bc} II$$

$$d - \frac{c}{a} \cdot b = \frac{ad - bc}{a}$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{a} \\ \frac{a}{ad-bc} \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & -\frac{ba}{ad-bc} \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{dove } \det A = ad - bc$$

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -10 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\det = -10 + 12 = 2$

Esercizio

1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a+b=2c \right\}$ è un sottospazio vettoriale?

2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ab+bc-3ac=0 \right\}$ " " ?

V sottospazio

① $\vec{v} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$\lambda \cdot \vec{v} \in V$

② $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$
$\vec{v_1} + \vec{v_2} \in V$

1)

① $a+b-2c=0$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} \in V \ ? \Leftrightarrow$

$* \quad \lambda a + \lambda b - 2\lambda c = \lambda(a+b-2c) = 0$

$*$ per ip. $a+b-2c=0$

② Supponiamo $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in V$, cioè

$a_1+b_1-2c_1=0$ e $a_2+b_2-2c_2=0$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{pmatrix} \in V \ ?$

$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)-2(c_1+c_2)=0 \ ?$

$(a_1+b_1-2c_1)+(a_2+b_2-2c_2)=0+0=0$

<u>oppure</u>

$\boxed{a+b-2c=0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esercizio: dimostrare

2) W <u>NON</u> è un sottospazio vettoriale. Ad esempio

se $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha che $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W$

<u>ma</u> $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$, come si può facilmente verificare.