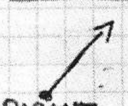
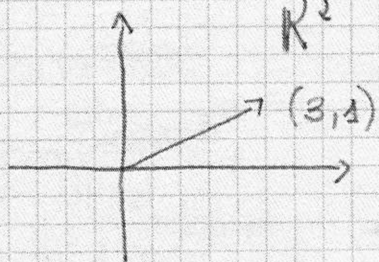
VETTORI

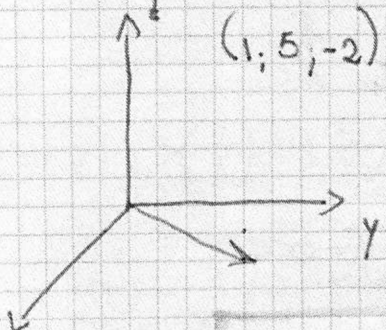


1) lunghezza
2) direzione
3) verso



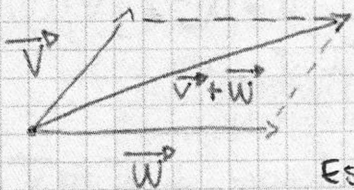
$\mathbb{R}^2$

Punti di $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow$ vettori con origine (0,0)



$(1; 5; -2)$

SOMME DI VETTORI

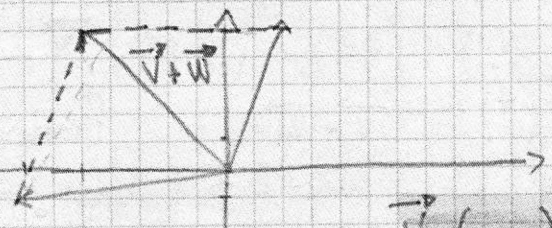


Esempio:

$\vec{V} = (2; 5)$

$\vec{W} = (-7; -1)$

$\vec{V} + \vec{W} = (2-7; 5-1) = (-5; 4)$

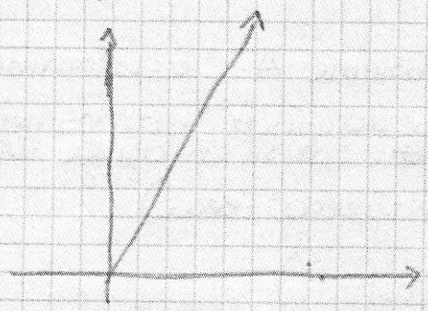


$\vec{V} = (x_1, y_1) \quad \vec{W} = (x_2; y_2)$

$\vec{V} + \vec{W} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$

$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$ FORMULA

$\vec{V} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$



modulo o lunghezza di $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$|\vec{V}| = \sqrt{x^2+y^2}$. Se $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

FORMULA DIST. TRA DUE PUNTI in $\mathbb{R}^3$

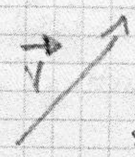
$\vec{V} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

MOLTIPLICAZIONE PER UNO "SCALARE"

(VETTORE + SCALARE ⇝ VETTORE)

$\vec{V} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\lambda = 4$

$\lambda \cdot \vec{V}$

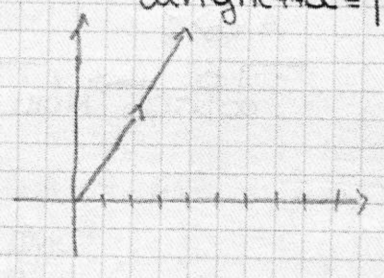


se λ è uno scalare $\lambda \cdot \vec{V}$ è il vettore che ha stessa direzione di $\vec{V}$, stesso verso di $\vec{V}$ se $\lambda > 0$, altrimenti verso opposto e il modulo $= \lambda \cdot$ (modulo $\vec{V}$)

Se $\lambda < 0$ ~~[illegible]~~ il verso è cambiato.
stessa direzione
lunghezza $= |\lambda| \cdot$ (modulo $\vec{V}$)

$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$3 \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$



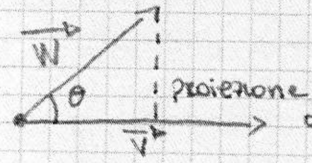
Prodotto per scalare

$\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

PRODOTTO SCALARE

(VETTORE + VETTORE ⇝ SCALARE)



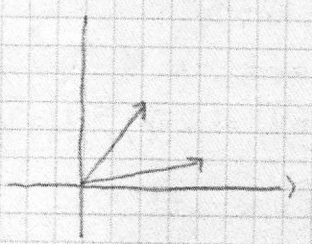
$\vec{V} \bullet \vec{W} = |\vec{V}| |\vec{W}| \cdot \cos\theta$

$\vec{V} \bullet \vec{W} \underset{def}{=} |\vec{V}| \cdot$ (proiezione di $\vec{W}$ su $\vec{V}$)

$\vec{V} \bullet \vec{W} = 0$

$\Updownarrow$

$\vec{V} \perp \vec{W}$



$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{V} \bullet \vec{W} =$

$\vec{V}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $4 \cdot 2 + 1 \cdot 3$

Prodotto scalare. Formule in $\mathbb{R}^3$:

$\vec{V}_1 \bullet \vec{U}_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO

$\vec{v}\begin{pmatrix}12\\3\\4\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{v} \perp \vec{w}$?

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ oppure no

$\cos\theta > 0$ se $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta = 0$ se $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta < 0$ se $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-12)(1) + (3)(1) + \cancel{4}(-2) \neq 0$

$\vec{v} \not\perp \vec{w}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \implies \vec{v} \perp \vec{w}$ perpendicolari

$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \implies \vec{v}$ e $\vec{w}$ formano un angolo acuto

$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \implies \vec{v}$ e $\vec{w}$ " " ottuso

$\vec{v} \cdot \vec{w} = -17$

$|\vec{v}||\vec{w}| = 13\sqrt{6}$

$\cos\theta = \dfrac{-17}{13\sqrt{6}} \cong -0{,}53$

Approssimativamente

$\cos\theta \simeq -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta \sim \frac{2}{3}\pi.$

Infatti

$\vec{v} = \sqrt{12^2+3^2+4^2} = \dots = 13$

$\vec{w} = \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \dots = \sqrt{6}$

SPAN:

$\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI

$5\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2}$

$\text{Span}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ = insieme di tutte le combinazioni lineari

$\overset{\text{def}}{=} \left\{ \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$5\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\7\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}21\\7\end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

Span: insieme di tutte le combinazioni LINEARI di vettori v_1, v_2

ESEMPIO

$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ 2x + y = -120 \end{cases}$

$x\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-120\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}13\\-120\end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}$

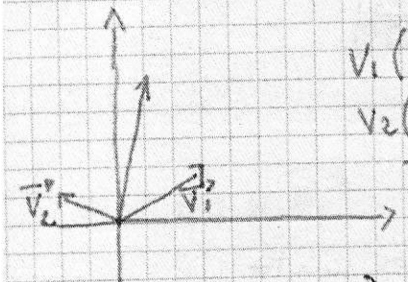
Cramer

$x = \dfrac{\begin{vmatrix}13 & -2\\-120 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2\\2 & 1\end{vmatrix}}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix}3 & 13\\2 & -120\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -2\\2 & 1\end{vmatrix}}$

$$x = \frac{13-240}{3+4} = \frac{-227}{7} \qquad y = \frac{-360-26}{3+4} = \frac{-386}{7}$$

CRAMER $\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases}$ ha soluzione $\iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0$

dunque $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2 \iff ad-bc \neq 0$



$V_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $V_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ci chiediamo se $\vec{w} \in \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$

$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$? $\quad \begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+1=5 \end{cases}$

$$x\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

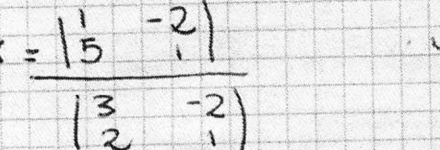
$$x = \frac{1+10}{3+4} = \frac{11}{7} \qquad y = \frac{15-2}{3+4} = \frac{13}{7}$$

$\frac{11}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{13}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Se prendo un qualunque $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ al posto di $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, ugualmente si dimostra che $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, quindi $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$

PROPRIETÀ

1) $(\lambda \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$



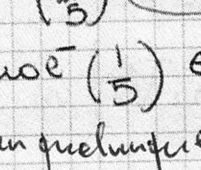
Ad esempio, $(3\vec{v})(\vec{w}) = \|3\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta = 3\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta$

$3(\vec{v} \cdot \vec{w}) =$

$\lambda = 3$

2) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$

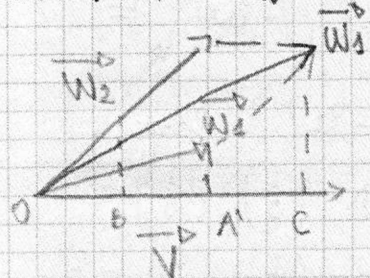
PROPRIETÀ COMMUTATIVA



$\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{w}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

3) $(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot \vec{w} = (\vec{v_1} \cdot \vec{w}) + (\vec{v_2} \cdot \vec{w})$ | Proprietà DISTRIBUTIVA

3') $\vec{v} (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{v} \cdot \vec{w_1} + \vec{v} \cdot \vec{w_2}$



$\overline{OA}$ = PROIEZIONE DI $\vec{w_1}$ SU $\vec{v}$
$\overline{OB}$ = " " " " $\vec{w_2}$ SU $\vec{v}$
$\overline{OC}$ = " " " " $\vec{w_1} + \vec{w_2}$ SU $\vec{v}$

$\vec{v} \cdot (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \|\vec{v}\| \underset{OA+OB}{\overline{OC}}$

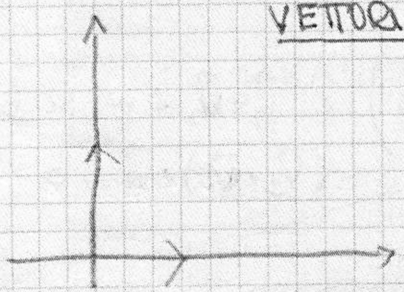
Nota che $\overline{OB} = \overline{AC}$

$\vec{v} \cdot \vec{w_1} = \|\vec{v_1}\| \, \overline{OA}$

$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \overline{OB}$

$\vec{v} \cdot \vec{w_2} = \|\vec{v_1}\| \, \overline{OB}$

Visto che $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$ concludo che $\vec{v} \cdot (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{v} \cdot \vec{w_1} + v \cdot w_2$



VETTORI DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^2$

$\vec{e_1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e_2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{e_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e_2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e_3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

VETTORI DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$

ES.

$\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-1\\7\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + -1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

In generale, ogni $\vec{v} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, è combinazione lineare degli n vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$

~~Qualunque vettore è di base canonica di R~~ $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$

La base canonica genera tutto lo spazio, cioè,

I vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ GENERANO tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$, cioè, ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ è combinazione lineare dei vettori della base canonica. Adesso dimostriamo le formule del prodotto scalare.

$\vec{v} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ vettori di $\mathbb{R}^2$.

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \underbrace{a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}} \cdot \underbrace{b_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{w}}$

$$\left(a_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \circ \left(b_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) + \left(a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\circ\left(b_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$\overset{a_1b_1}{a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\circ b_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + \underbrace{\cancel{a_1\circ\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot b_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}}_{\emptyset} + \underbrace{\cancel{a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\circ b_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}}_{\emptyset} + \overset{a_2b_2}{a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot b_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} =$$

$$a_1b_1 + a_2b_2.$$

Infatti $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1$; $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$; e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1$

- $\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

$\vec{v}$

N.B = $\vec{e}_1\circ\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2\circ\vec{e}_2 = 1$, $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = 0$

$\vec{v}\circ\vec{w} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Esercizi Vero o falso?

$\vec{v}_1\perp\vec{w}$ e $\vec{v}_2\perp\vec{w} \Rightarrow v_1+v_2\perp\vec{w}$?

Ad esempio $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}_1\perp\vec{w}$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix}$ $\vec{v}_2\perp\vec{w}$

$\vec{v}_1+\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\-3\\8\end{pmatrix}$ e $\vec{v}_1+\vec{v}_2\perp w$ perche' $(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\circ\vec{w} = 0$

É VERO! Non solo in questo esempio ma in tutti i casi

se $\vec{v}_1+\vec{v}_2\perp\vec{w}$ allora $\vec{v}_1\perp w$ e $\vec{v}_2\perp\vec{w}$? É FALSO

Esempio: $\vec{v}_1\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$. Allora $\vec{v}_1+\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ è banalmente perpendicolare a qualunque vettore $\vec{w}$, ma in generale $\vec{v}_1\not\perp\vec{w}$ e $\vec{v}_2\not\perp\vec{w}$

se $\vec{w}\perp\vec{v}_1$ e $\vec{w}\perp v_1+v_2$, allora $\vec{w}\perp v_2$? VERO

IPOTESI: $\vec{w}\perp\vec{v}_1$ e $\vec{w}\perp\vec{v}_1+\vec{v}_2$

TESI: $\vec{w}\perp\vec{v}_2$

$\vec{w}\circ(\vec{v}_1+\vec{v}_2) - \vec{w}\cdot\vec{v}_1 = \vec{w}\cdot\vec{v}_2$

é vero! La perpendicolarità ad un vettore fissato si preserva per combinaz. lineari.

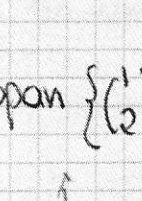
Ad esempio, $\vec{w}\perp\vec{v}_1$ e $\vec{w}\perp\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{w}\perp(3\vec{v}_1+2\vec{v}_2)$ è vero!

$\vec{w}\circ(3\vec{v}_1+2\vec{v}_2) = \vec{w}\cdot(3\vec{v}_1) + \vec{w}(2\vec{v}_2) = 3(\vec{w}\cdot\vec{v}_1) + 2(\vec{w}\cdot\vec{v}_1) = 0$

$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ogni vettore è combinazione lineare di e_1 e_2, precisamente $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a\cdot\vec{e}_1 + b\cdot\vec{e}_2$

$\mathrm{Span}\{e_1, e_2\} = \mathbb{R}^2$

Ma anche $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$



Ad esempio, $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\exists\, \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

Si verifica che per ogni vettore $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ esistono λ_1, λ_2 tali che $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. FARE per ESERCIZIO (si usa Cramer)

METODO DI RIDUZIONE di GAUSS: introduzione.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 7z = 8 \\ +2x + 3y - 9z = -10 \end{cases}$$

Consideriamo questo esempio.

PIVOT

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -7 & 8 \\ 2 & 3 & -9 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} - 2\text{I}]{\text{II} - 4\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -14 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ \quad\;\; + y + z = 0 \\ \quad\;\; -y - 5z = -14 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} + \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -14 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ \quad\;\; + y + z = 0 \\ \quad\quad\;\; - 4z = -14 \end{cases}$$

$z = \frac{7}{2}$ $\quad y = -\frac{7}{2}$

$$x + 2\left(-\frac{7}{2}\right) - 2\left(\frac{7}{2}\right) = 2$$

$$x - 7 - 7 = 2 \Rightarrow x = 16$$

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x + y - z = 5 \\ -x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} - \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III} + \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Se i PIVOT sono in QUANTITÀ Minore di 3 I SISTEMI 3×3 ~~...~~ HANNO INFINITE SOLUZIONI O SONO IMPOSSIBILI

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ \quad\quad\;\; -2z = -2 \\ \quad\quad\quad\;\; 0 = 8 \end{cases}$$

(il sistema non ha soluzioni)

MATRICI

NUMERO nella RIGA i COLONNA J

Una matrice $n \times m$ è il ~~dato~~ di ~~nm~~ numeri $a_{i,j}$

Esempio $A \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ matrice 2×3

$a_{1,1} = 2 \quad a_{1,2} = 1 \quad a_{1,3} = -3$

$a_{2,1} = 4 \quad a_{2,2} = 5 \quad a_{2,3} = -1$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Un sistema lineare dove i termini noti sono 0 si dice SISTEMA OMOGENEO

Una matrice si dice quadrata se ha dimensioni $n \times m$ dove $n = m$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \in \mathbb{R}^2$

ha soluzione $\Leftrightarrow$ il vettore dei termini noti $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$

APPLICAZIONE LINEARE ASSOCIATA AL SISTEMA

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = a \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = b \end{cases}$$

HA SOLUZIONE $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Imm}(T) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

NB: $\mathrm{Imm}\, T = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

I vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ non hanno tutti la stessa direzione (in effetti $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10-4 \neq 0$, dunque $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ hanno direzioni diverse)

dunque $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\} \mathbb{R}^2$ e, a maggior ragione,

$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ e quindi il sistema ha soluzioni per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Scrittura con matrice e vettore: $\boxed{\vec{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & +1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

RIGHE PER COLONNE

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

QUESTO È MOLTIPLICARE UN VETTORE PER UNA MATRICE

A matrice $n \times m$ $\quad A = (a_{ij})$ $\begin{matrix} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots m \end{matrix}$. Se $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$

allora $A \cdot \vec{v} = \left(\underline{\text{per definizione}}\right) = v_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{\text{colonna 1 di } A} + v_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{\text{colonna 2 di } A} + \dots v_m \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{\text{colonna } m \text{ di } A}$

$$\boxed{= \sum_{j=1}^{m} v_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}}$$ fare la combinazione lineare delle colonne

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

RIGA PER COLONNA (Riga, o vettore = 28) è la stessa cosa

B matrice 3×4

Applicaz lineare associata $T_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

Prodotto di una matrice per un vettore

combinazione lineare colonne matrice — RIGHE X COLONNE

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A\ 2 \times 3$ $\qquad$ $B\ 3 \times 4$

dove $\vec{c}_1, .., \vec{c}_4$ sono le colonne di B

$$A \cdot B = \left(A\vec{c}_1 \,\middle|\, A\vec{c}_2 \,\middle|\, A\vec{c}_3 \,\middle|\, A\vec{c}_4 \right) = \begin{pmatrix} -17 & 14 & 7 & -12 \\ -22 & -14 & -24 & -42 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\times3} \cdot B_{3\times4} = C_{2\times4}$$

A $\quad$ B $\quad$ C

$n \times m$ $\quad$ $m \times k$ $\quad$ $n \times k$

$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $T_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$T_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $T_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T_{AB} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$T_{AB} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -17 \\ -22 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ -24 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -12 \\ -42 \end{pmatrix}$$

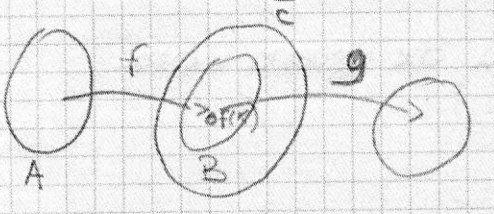
$T_{AB} = T_A \circ T_B$ COMPOSIZIONE

Il prodotto di matrici corrisponde alla composizione delle applicazioni lineari

Composizione di funzioni

$f: A \to B$ $\quad$ $g: C \to D$, $B \subseteq C$, la composizione $g \circ f$ ("PRIMA f e poi g") è definita così:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Es. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x+1$ $\qquad$ $g \circ f : x \longmapsto (x+1)^2$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x^2$ $\qquad$ $f \circ g : x \longmapsto x^2 + 1$

Notare che in generale $f \circ g \neq g \circ f$

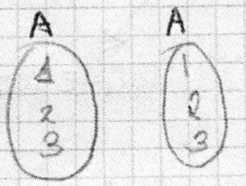
f è iniettiva? $f(a) = f(b)$, cioè $a+1 = b+1 \Rightarrow a = b$ sì

g è iniettiva? NO ad esempio $g(1) = g(-1)$

f è suriettiva? sì DATO $y \in \mathbb{R}$ se prendo $x = y-1$ $f(x) = y$

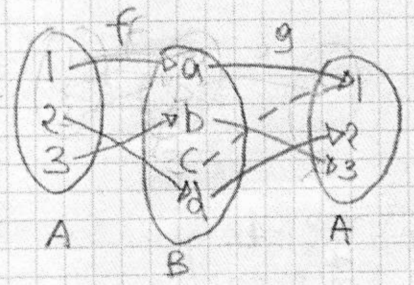
g è suriettiva? NO, ad esempio $-1 \notin \mathrm{Im} f$.

$g_{:B\to A}$ si dice INVERSA SINISTRA di $f_{:A\to B}$ se $g\circ f = id_A$ dove id_A è la FUNZIONE IDENTITÀ sull'insieme A



$f: A \to B$

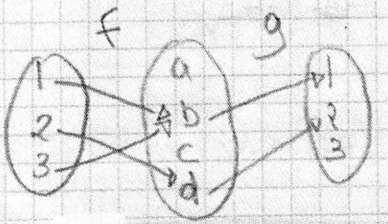
Esempio



$g\circ f = id_A$

(Il valore che g assume in c è irrilevante)

Esempio

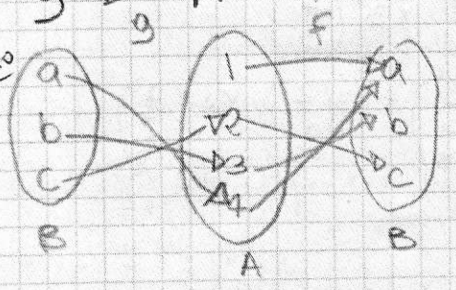


In questo caso NON C'È L'INVERSA SINISTRA di f.

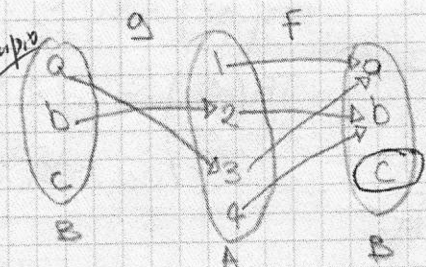
- f ha INVERSA SX $\Leftrightarrow$ f è iniettiva

$g: B \to A$ è INVERSA DESTRA di $f: A \to B$ se $f\circ g = id_B$

Esempio



Esempio



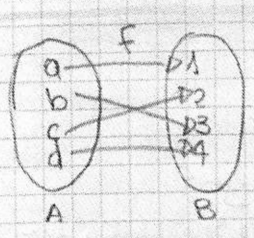
in questo esempio f NON ha inversa destra

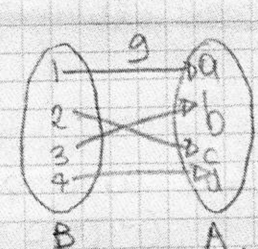
f ha inversa DX $\Leftrightarrow$ f è suriettiva

f NON HA frecce che colpiscono c ($c \notin Im f$)

quindi NON posso trovare l'inversa destra di f.

f biunivoca:





$f\circ g = id_B$

$g\circ f = id_A$

La stessa funzione g è sia inversa sinistra che inversa destra e si scrive f^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB \rightsquigarrow T_A \circ T_B$ $\qquad T_B = \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$T_B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \\ -5x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$T_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

. Calcoliamo ora $T_A \circ T_B$, cioè $T_A\left(T_B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right)$ per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

$$T_A\begin{pmatrix}2x_1+3x_2+4x_3+7x_4\\ x_1+x_3+2x_4\\ -5x_1+2x_2\end{pmatrix} = (2x_1+3x_2+4x_3+7x_4)\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}+(x_1+x_3+2x_4)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$
$$+(-5x_1+2x_2)\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \quad (1)$$

$$AB=\begin{pmatrix}-17 & 14 & 7 & -12\\ 22 & -14 & -24 & -42\end{pmatrix}$$

$$T_{AB}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}-17\\22\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}14\\-14\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}7\\-24\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}+12\\-42\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-17x_1+14x_2+7x_3+12x_4\\ 22x_1 - 14x_2 - 24x_3 - 42x_4\end{pmatrix} \quad (2)$$

Un semplice calcolo mostra che i vettori (1) e (2) sono uguali, dunque $T_A\left(T_B\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right) = T_{AB}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ per ogni $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in R^4$, cioe' $T_A\circ T_B = T_{AB}$.

Questa proprietà che abbiamo dimostrato in questo esempio, vale in generale:

$$T_A\circ T_B = T_{AB}$$