DIMENSIONE → tutte le basi di un sottospazio hanno stesso numero di elementi che si chiama DIMENSIONE

$\mathbb{R}^n$ ha dimensione $n$.

NB: per essere una base di $\mathbb{R}^n$ ci vogliono $n$ vettori, né di più né di meno. Infatti se fossero di meno non genererebbero e se fossero di più ~~genererebbero ma~~ non sarebbero L.I e quindi non andrebbero bene lo stesso come basi.

dim:

- prendo 2 vettori di $\mathbb{R}^3$ e vedo che non generano.

$V=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad V'=\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}$

Voglio vedere che $\text{span}\{V ; V'\} \neq \mathbb{R}^3$

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicaz lineare $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}$ e lo $\text{span}\{V, V'\}$ che dovrebbe essere uguale a $\mathbb{R}^3$ è $\text{Im} f$. Da ricordare che $\text{Im} f = \text{Col} A = \text{span}\{\text{col pivot}\}$

ma le colonne pivot ~~al~~ massimo in quella matrice possono essere 2. Non si genera tutto $\mathbb{R}^3$, ~~[illegible]~~ un'applicaz. lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ non può essere suriettiva e quindi non ho soluzione ~~[illegible]~~ per tutti i possibili $(\vec{b})$. Infatti nella matrice ridotta trovo una riga di zeri e mettendo 1 come termine noto per quella riga, non ho soluzioni.

- ora vedo che anche 4 vettori non vanno bene perché non sono linearmente indipend. Questi 4 vettori sarebbero L.I solo se $\ker f = \{0\}$ ma se prendo 4 vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \\ v_1'' & v_2'' & v_3'' & v_4'' \end{vmatrix}$$

qui c'è per forza una colonna libera e quindi nel ker f (che è span delle soluz. speciali) non può essere solo lo 0.

(Es) $f: \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^5$ applic lineare

Quanto può esser dim(Im f)? e ker f?

L'Im f è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$, la sua dimensione quindi è $\leq 5$. Sarà quindi $0 \leq \dim(\mathrm{Im} f) \leq 5$

Il ker è un sottospazio di $\mathbb{R}^8$, la sua dimensione non potrà essere $> 8$.

$$3 \leq \dim(\ker f) \leq 8$$

visto che

$$\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) = 8$$

$$\overset{\wedge}{5} + \dots = 8$$

(Es) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di $\mathbb{R}^3$?

devo vedere che i 3 vettori generano e che siano L.I. Per generare vuol dire che $\mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$ e quindi f suriettiva. Per L.I vuol dire che $\ker f = \{0\}$ e quindi f deve essere anche iniettiva. In poche parole f deve essere biunivoca e quindi invertibile. Guardo se lo è.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+\frac{1}{3}\mathrm{I}]{\mathrm{II}-\frac{2}{3}\mathrm{I}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}+6\mathrm{II}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}+\frac{3}{2}\mathrm{II}} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Le' invertibile e quindi quei vettori sono una base.

Dovevamo ancora dimostrare questa proprietà:

LE COLONNE PIVOT SONO L.I ANCHE NELLA MATRICE INIZIALE

dimostraz:

Abbiamo una matrice iniziale A e una matrice ridotta S.

$$A \xrightarrow[\text{mosse di Gauss}]{} S \qquad S = E \cdot A$$

$E$: matrice corrispondente alle mosse di Gauss (e' invertibile)

In A alcune colonne saranno pivot, altre libere. Ad esempio:

$$A = (\underset{p}{C_1} | \underset{p}{C_2} | \dots | \underset{p}{C_k} | \underset{l}{C_{k+1}} | \dots | \underset{l}{C_n})$$

Devo dimostrare che le colonne pivot sono L.I e quindi che $\underline{\alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_k C_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0}$

$$S = (\underset{p}{d_1} | \underset{p}{d_2} | \dots | \underset{p}{d_k} | \underset{l}{d_{k+1}} | \dots | \underset{l}{d_n})$$ è la matrice ridotta

Prendo $A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_k C_k}_{=0 \text{ per ipotesi}} + 0 \cdot C_{k+1} + \dots + 0 \cdot C_n = \vec{0}$

$$S \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = EA \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = E \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \vec{0} = \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \dots + \alpha_k d_k + 0 \cdot d_{k+1} + \dots + 0 \cdot d_n = \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_k d_k$$

Ma $\{d_1 \dots d_k\}$ sono le colonne pivot della matrice ridotta che abbiamo già visto che sono L.I e quindi $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

- L'intersezione di 2 sottospazi è un sottospazio

dim: $V_1, V_2$ sono sottospazi:

$$\begin{cases} (1)\ v, w \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v + w \in V_1 \cap V_2 \\ (2)\ \alpha \in \mathbb{R} \quad v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \alpha \cdot v \in V_1 \cap V_2 \end{cases}$$

$v, w \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v, w \in V_1$ e $v, w \in V_2$

ma $V_1$ è un sottospazio e allora $v, w \in V_1 \Rightarrow v + w \in V_1$

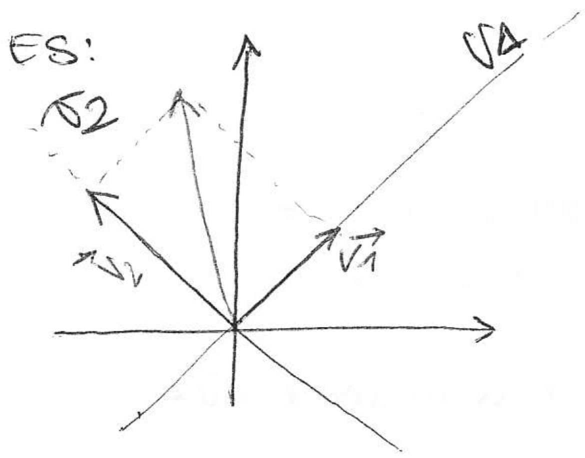
$V_2$ è sottospazio e allora $v, w \in V_2 \Rightarrow v + w \in V_2$

ma se $v+w$ appartiene sia a $V_1$ che a $V_2$ allora $v+w \in V_1 \cap V_2$

Dato che valgono (1) e (2) allora $(V_1 \cap V_2)$ è un sottospazio.

- L'unione di sottospazi in genere non è un sottospazio

ES:




$V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$V_1 \cup V_2$ non è un sottospazio perché non vale la proprietà della somma, infatti se prendo un $\vec{v_1} \in V_1$ e un $\vec{v_2} \in V_2$, la somma non rimane nel sottospazio.

Es) $f: \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^8$ applicaz. lineare. Se $f$ non è suriettiva allora la dimensione del nucleo è almeno 4. (V) o (F)? VERO o FALSO?

$$\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) = 11$$

$f$ suriettiva $\Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 8$ e quindi $\dim(\ker f) = 3$

però $f$ non è suriett $\Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Im} f) \leq 7 \Longleftrightarrow \dim(\ker f) \geq 4$.

quindi (V) VERO

---

Es) Siano $S, T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ due applicazioni lineari. Allora $(S+T): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un'applicaz. lineare. (V) o (F)? <u>Vera</u>

Per def di ~~appl. lineare~~ $S+T$ si ha $(S+T)(v) = S(v) + T(v)$.
È facile verificare che valgono le proprietà di appl. lineare, visto che sia $S$ che $T$ sono appl. lineari.

SPAZIO VETTORIALE (SU $\mathbb{R}$)

È un insieme di elementi chiamati vettori dove c'è un'operazione SOMMA tale che

(1) $V_1 + (V_2 + V_3) = (V_1 + V_2) + V_3$ associativa

(2) esiste $0$ tale che $v + 0 = v$ elemento neutro

(3) $\forall v \ \exists w$ tale che $v + w = 0$ esistenza dell'inverso $(w = -v)$

(4) $v + w = w + v$ commutativa

c'è anche un'operazione di PRODOTTO "ESTERNO" per numeri reali → PRODOTTO × SCALARE tale che

(5) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

(6) $(\alpha + \mu) \cdot v = \alpha v + \mu v$

(7) $0 (\in \mathbb{R}) \cdot v = 0 (\in V)$

(8) $1 \cdot v = v$

**Def.** Il DETERMINANTE è l'unica funzione dell'insieme $M_{n\times n}$ delle matrici quadrate $n\times n$ a valori reali

$$\det : M_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che soddisfa le seguenti tre proprietà:

(1) $\det(I) = 1$ (la matrice identità ha determinante $= 1$)

(2) Se scambio due righe di una matrice il determinante cambia segno

(3) Il determinante si comporta come un'applicazione lineare rispetto ad ogni riga. Più precisamente, se $A_i(R)$ denota la matrice $A$ dove al posto della riga $i$-esima è posto il vettore riga $R$, allora

$$\det(A_i(R_1 + \lambda R_2)) = \det A_i(R_1) + \lambda \cdot \det A_i(R_2)$$

Conseguenze:

- Se $A$ è una matrice $n \times n$ e moltiplico tutti i suoi coefficienti per $\lambda$ allora $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

- Se una matrice $A$ ha 2 righe uguali allora $\det(A) = 0$

- Se sottraggo il multiplo di una riga da un'altra il determinante non cambia. Dunque le mosse di Gauss <u>NON</u> cambiano il determinante, tranne lo scambio di righe che cambia segno al determinante.

→ MANCANO APPUNTI SU QUESTA PARTE. CONSULTARE IL CAPITOLO 5 del libro di testo STRANG "Introduction to Linear Algebra" 4th edition.

: Se una matrice ha una riga di 0 allora det = 0

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}} \xrightarrow[\text{II + I}]{\text{sommo}} \underset{S}{\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}}$$

Il determinante di S è uguale a quello di A per la proprietà #3 del determ. Ma il det di S è = 0 perché ci sono 2 righe uguali (proprietà #2), ma allora è 0 anche il det A.

: Se una matrice è triangolare superiore allora il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = -30$$

REGOLA PRATICA PER IL DETERMINANTE DELLE MATRICI 3x3

Ripeto accanto le prime 2 colonne e poi faccio (somma dei prodotti di quelle blu) - (somma prodotti viola)

blu: diagonali verso il basso

viola: diagonali verso l'alto

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & 5 & 5 & -4 \\ 9 & -9 & 10 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = (40 + 135 + 135) - (150 + 45 + 108) = 310 - 303 = 7$$

Il determinante di una matrice è 0 se ci sono colonne libere, altrimenti è uguale al prodotto dei pivot cambiato di segno tante volte quante sono stati gli scambi di riga nella riduzione di Gauss.

# REGOLA GENERALE PER IL CALCOLO DEI DETERMINANTI

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 5 & -4 & 5 \\ 9 & -9 & 10 \end{vmatrix}$$

Scelgo a piacere una riga o una colonna. Per esempio scelgo prima riga. Poi faccio questo

$$(-1)\cdot \det\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} \quad - 3\cdot\det\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad -3\det\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$$

QUESTO È IL MINORE DETERMINATO DALLA POSIZ OCCUPATA DA (-1) E CIOÈ LA POSIZ 1,1 TOLGO PRIMA RIGA E PRIMA COLONNA E VEDO CHE RIMANE

$$\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

POSIZ 1,3

$$\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

POSIZ 1,2

$$\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

Poi davanti a (-1), (3), (-3) ci metto un segno +/- a seconda se la loro posiz è pari o dispari (se è pari lascio il segno che c'è, sennò lo cambio).
(-1) ha posiz pari (1+1=2) quindi lascio −
(3) aveva posiz disp (1+2=3) quindi metto il −
(-3) aveva posiz pari (1+3=4) quindi lascio il −

$$-1\det\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} = 7$$

~~Viceversa~~ se trovo una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ * rispetto alla quale la matrice associata è diagonale $\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}$ allora i vettori $v_i$ sono autovettori ~~(cioè i vettori qui della base)~~ perché

$f(\vec{v_i}) = d_i \vec{v_i}$

Infatti $v_1$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a $B$,
$v_2$ ha coord $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ecc. e se moltiplico qst per la matrice trovo le coordinate rispetto a $B$.

$$\underset{\text{rispetto a } B}{f(\vec{v_1})} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow d_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 v_n = d_1 v_1$$

↑ stessa cosa per gli altri.

NB: UNA APPLICAZIONE LINEARE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SI DICE DIAGONALIZZABILE SE ESISTE UNA BASE RISPETTO ALLA QUALE LA MATRICE ASSOCIATA È DIAGONALE.

↘ (magari non era diagonale con la base canonica ma lo è rispetto ad un'altra base) se $A$ è la matrice rispetto alla base canonica e $S$ è la matrice $(V_1|\dots|V_n)$ dove $\mathcal{B}=\{V_1 \dots V_n\}$ allora la matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $B = S^{-1} A \cdot S$

Def. una matrice $A$ è diagonalizzabile se esiste una matrice invertibile $S$ (che è la matrice cambio di base) tale che $S^{-1} A \cdot S$ è diagonale.

Nb: $(\vec{v} \neq 0)$
se $f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$
$\vec{v}$ si dice AUTOVETTORE e
$\lambda$ si dice AUTOVALORE

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

è diagonalizzabile? cioè ce la faccio a trovare una base fatta tutta di autovettori?
Io vorrei che succedesse una cosa del genere

$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \quad (\vec{v} \neq 0)$

$A\vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$

TROVARE GLI AUTOVALORI.

$\vec{v} \neq 0$ è autovettore $\Leftrightarrow$

$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$A\vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$ per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$, cioè

$A\vec{v} - \lambda I \vec{v} = \vec{0}$, cioè

$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \iff 0 \neq \vec{v} \in \ker(A - \lambda I) \iff \ker(A - \lambda I) \neq 0$

$\Updownarrow$

la matrice non è invertibile e dunque $\det(A - \lambda I) = 0$

conclusione

$P_\lambda(A)$ POLINOMIO CARATTERISTICO

- $\lambda$ autovalore $\iff \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{=P_\lambda(A)} = 0$
- $\vec{v}$ autovettore di autovalore $\lambda \iff \vec{v} \in \ker(A - \lambda I)$

ES) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

È diagonalizzabile?
Cerco gli $\boxed{\text{autovalori}}$:

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\downarrow$

$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = [(3-\lambda)(-2-\lambda)] - (-4) =$

$= -6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ $\quad \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ $\Big\}$ QST SONO GLI AUTOVALORI

A questo punto cerchiamo gli $\boxed{\text{autovettori}}$ considerando gli autovalori uno alla volta:

$\underline{\lambda = +2}$ · $\ker(A - 2I)$ questo si dice AUTOSPAZIO relativo all'autovalore $\lambda = 2$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

$\ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} =$ cerco le soluzioni speciali ($\vec{v}$ autovett $\in \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + 4I} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\quad$ P $\quad$ l

$x_2 = 1$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$ $\quad \boxed{x_1 = -1}$

$\vec{S} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ho solo una soluzione speciale, quindi $\dim(\ker(A-2I)) = 1$.

Autospazio $(A, 2) = \ker(A - 2I) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
Gli autovettori di autovalore 2 sono tutti e soli i vettori $\vec{v}$ che stanno nell'autospazio
$\text{Aut}(A, 2) = \ker(A - 2I)$
Prendo $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettore di autovalore $\lambda = 2$.

Adesso prendo $\lambda = -1$ e cerco

$\ker(A+I) = $ Autospazio$(A, -1)$.

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\ker\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+I} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\;p \quad\; \ell}$$

. Cerco le soluzioni speciali:

$\boxed{x_2 = 1}$

$$\begin{cases} 4x_1 + 1 = 0 & \boxed{x_1 = -\frac{1}{4}} \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$\vec{S_2} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ +1 \end{pmatrix}$. Ho solo una soluzione speciale, quindi $\dim(\ker(A+I)) = 1$.

$\text{Aut}(A, -1) = \ker(A + 1I) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Prendo $\vec{V_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettore

$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ base $\longrightarrow$ Ho trovato una base di autovettori, quindi A è diagonalizzabile.

PROPOSIZ:

Se $v_1$ è autovettore di autovalore $\lambda_1$ e $v_2$ è autovettore di autovalore $\lambda_2$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora $v_1$ e $v_2$ sono indipendenti.

dim:

supponiamo di avere una combinazione lineare $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0$. Moltiplico per A ed ottengo:

$$A(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 A v_1 + \mu_2 A v_2 = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

$$\begin{cases} \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0 \\ \mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_2 v_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{moltiplico per } \lambda_1 \text{ questa equazione}} \begin{cases} \mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_1 v_2 = 0 \\ \mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_2 v_2 = 0 \end{cases}$$

(sottraggo)

$$0 + (\mu_2 \lambda_1 - \mu_2 \lambda_2) v_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_2 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underset{\neq 0}{v_2} = 0$$

visto che $v_1$ e $v_2$ sono autovettori di autovalore $\lambda_1$ e $\lambda_2$, allora $A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$ e $A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2$

$\Longrightarrow \mu_2 = 0$

Analogamente, moltiplicando per $\lambda_2$ si ottiene che $\mu_1 = 0$, e quindi $v_1$ e $v_2$ sono L.I.

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA →

LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DI UN CERTO AUTOVALORE $\lambda$ È LA DIMENSIONE DEL SUO AUTOSPAZIO $Aut(\lambda)$

IMPORTANTE:
TUTTI GLI AUTOVALORI SONO NUMERI REALI E LA LORO MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA = MOLT. GEOM.

$\Updownarrow$

DIAGONALIZZABILE

IL polinomio caratteristico DI UNA MATRICE A è

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I).$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico.

# FORMULA DI BINET

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

ES $\det(AB^2 \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(B) \cdot \det(A^{-1}) = (\det(B))^2$

Infatti $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) =$
$= \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$\det(I) = 1$

Nb: Da ricordare che il determinante è univocamente determinato da 3 proprietà:

(1) $\det(I) = 1$

(2) se scambio 2 righe il det cambia di segno

(3) si comporta come un'applicazione lineare rispetto a ciascuna riga

→ se moltiplico ~~rispettivamente~~ una singola riga per $\lambda$ allora il det si moltiplica per $\lambda$

→ Se una riga R è somma di 2 vettori $R_1 + R_2 =$ $\det(R_1 + R_2) = \det(R_1) + \det(R_2)$

Più precisamente se in una matrice A una riga $R_i = R^1 + R^2$ è la somma di due vettori riga, e se $A_1$ è la matrice dove la riga $R_i$ è rimpiazzata da $R^1$, e se $A_2$ è la matrice dove la riga $R_i$ è rimpiazzata da $R^2$, allora $\det(A_1) + \det(A_2) = \det(A)$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 3+\lambda \cdot 2 & -4+\lambda 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3,-4) & + & \lambda \cdot (2,3) \\ -1 & & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} \det\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \lambda \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

questa riga era somma di 2 vettori quindi faccio il det del primo + il det del secondo

questa è moltiplicato per $\lambda$ allora moltiplico il det per $\lambda$

Esempio:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

se una riga è somma di 2 vettori allora ~~det(R1+R2) = det(R1)+det(R2)~~ il determinante è la somma dei determinanti.

NB: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

$[A_{n\times n}]$

Infatti ognuna delle n-righe è moltiplicata per $\lambda$.

- le 3 proprietà implicano che $\det(A) = \underset{\text{dei pivot}}{\text{prodotto}} \cdot (-1)^k$

perchè ogni volta che scambio riga il det cambia di segno

dove k è il numero di volte che ~~ho~~ scambiato due righe nella riduzione.

dim. Binet:

- Se il $\det(B) = 0$ allora $\det(A\cdot B) = 0$. Perchè?
Se il $\det(B) = 0$ vuol dire che B non è invertibile quindi B non è iniettiva e quindi non lo è nemmeno $(A\cdot B)$. Infatti, se $f_B$ non è iniettiva $\exists \vec{x} \neq 0$ t.c. $f_B(\vec{x}) = 0$
Compongo $f_A \circ f_B$: $f_A(f_B(\vec{x})) = f_A(0) \Rightarrow \vec{x} \in \mathrm{Ker}(AB)$
ma $\vec{x} \neq 0$ e quindi $A\cdot B$ non è iniettiva e quindi $\det(A\cdot B) = 0$.

- Supponiamo invece che $\det(B) \neq 0$. Perchè anche in questo caso la formula di Binet funziona?
Prendiamo la funzione $\boxed{\delta(A) = \frac{\det(A\cdot B)}{\det(B)}}$. Se dimostro che questa funzione $\delta$ è in realtà la funzione determinante posso concludere che $\det(A) = \frac{\det(A\cdot B)}{\det(B)}$ e quindi che $\det(A)\cdot\det(B) = \det(A\cdot B)$

$\cancel{\det(A) = \frac{\det(A\cdot B)}{\det(B)} \cdot \det(B)}$

Per vedere se $\delta$ è la funzione determinante guardo che verifichi le 3 proprietà che lo caratterizzano:

1) $\det(I) = \dfrac{\det(I \cdot B)}{\det(B)} = \dfrac{\det(B)}{\det(B)} = 1$

La proprietà (1) funziona.

(2) se scambio 2 righe di A, il prodotto A·B è identico tranne che ha quelle ~~essere~~ 2 righe scambiate e allora det(AB) cambia segno e quindi anche det(A) cambia segno e quindi la propr. (2) funziona.

Infatti ad esempio

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{(A \cdot B)}{\begin{pmatrix} 10 & 27 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}} \qquad \det(AB) = 100 - 108 = -8$$

$$\underset{\text{con le righe scambiate}}{\underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{\text{con le righe scambiate}}{\underset{(AB)}{\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}}} \qquad \underset{\text{con le righe scambiate}}{\det(AB)} = 108 - 100 = 8$$

(3) La 3 è più difficile da verificare ma comunque non complicata. ~~non la dimostriamo~~ ~~ecco qua~~. (I dettagli sono sul libro Strang "Linear Algebra")

MATRICE TRASPOSTA $A^T$

Nella matrice trasposta le righe di A diventano le colonne di $A^T$

Cioè, se

$$\boxed{\begin{array}{ll} A = (a_{ij}) & i = 1, \ldots, m = \text{num. righe} \\ & j = 1, \ldots, n = \text{num. colonne} \\ A^T = (a'_{ji}) & \\ \text{dove } a'_{ji} = a_{ij} & \end{array}}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

m = 3 righe
n = 2 colonne

m = 2 righe
n = 3 colonne

2 era in posiz. 3,2
ora è in posiz. 2,3

# MATRICE SIMMETRICA

A si dice simmetrica se $A^T = A$ — righe = colonne

NB: le matrici simmetriche sono quadrate

ES.

matrice identità è simmetrica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Infatti:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

scambio righe e colonne

$$I^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ES Ogni matrice diagonale è simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

NB: se A è simmetrica allora tutti i suoi autovalori sono reali. (vediamo dopo il perché)

---

PROP: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

dim:

$A = (a_{ij})$ $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$

$B = (b_{jk})$ $j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, h$

righe di A · colonne di B

$A \cdot B = (c_{ik})$ $i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, h$ dove $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$

$(A \cdot B)^T = (c'_{ki})$ dove $c'_{ki} = c_{ik}$

ES: $c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & b_{13} \\ \cdot & \cdot & b_{23} \\ \cdot & \cdot & b_{33} \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$C = (c_{ik})$ ha il numero di righe di A e il numero di colonne di B

$A^T = (a'_{ji})$ $j = 1, \dots, n$ ; $i = 1, \dots, m$ dove $a'_{ji} = a_{ij}$

perché tra $A$ e $A^T$ si inverte la posizione ~~[illegible]~~ di righe e colonne.

$B^T = (b'_{kj})$ $k = 1, \dots, h$ ; $j = 1, \dots, n$ dove $b'_{kj} = b_{jk}$

righe di $B^T$ colonna di $A^T$

$B^T \cdot A^T = (d_{ki})$ $k = 1, \dots, h$ ; $i = 1, \dots, m$

dove $d_{ki} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj} \cdot a'_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \cdot a_{ij} = c_{ki}$

Quindi $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

---

- Se $A$ è invertibile $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (anche $A^T$ è invertibile)

dim: $A^T \cdot (A^{-1})^T \underbrace{=}_{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T} (A^{-1} \cdot A)^T = (I)^T = I$

$(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = (I)^T = I$

$(A^{-1})^T$ è l'inversa di $A^T$ e cioè $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- $\det(A^T) = \det(A)$

ES: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 4 - 2 = 2$

$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A^T) = 4 - 2 = 2$

# BASI ORTOGONALI

Se $V_1, V_2, V_3 \neq 0$ sono perpendicolari a 2 a 2, cioè se
$V_1 \cdot V_2 = 0$ , $V_1 \cdot V_3 = 0$ , $V_2 \cdot V_3 = 0$
allora $\{V_1, V_2, V_3\}$ sono L.I.
linearmente indipendenti

[vale anche per un numero n di vettori con n qualunque]

Ricordiamo le proprietà del prodotto scalare:

- $(\alpha \cdot V) \cdot (W) = \alpha \cdot (V \cdot W)$

- $(V_1 + V_2) \cdot W = (V_1 \cdot W) + (V_2 \cdot W)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ x_3 + x_3' \end{pmatrix}}_{(V_1 + V_2)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{W} = (x_1 + x_1')y_1 + (x_2 + x_2')y_2 + (x_3 + x_3')y_3 =$$

$$= x_1 y_1 + x_1' y_1 + x_2 y_2 + x_2' y_2 + x_3 y_3 + x_3' y_3 =$$

$$= \overbrace{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)}^{(V_1 \cdot W)} + \overbrace{(x_1' y_1 + x_2' y_2 + x_3' y_3)}^{(V_2 \cdot W)}$$

Voglio dimostrare che $V_1, V_2$ sono L.I.:

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

rivedi

$$0 = (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 \mid \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = (\alpha_1 V_1 \mid \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) +$$
$$(\alpha_2 V_2 \mid \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = (\alpha_1 V_1 \mid \alpha_1 V_1) + (\alpha_1 V_1 \mid \alpha_2 V_2) +$$
$$(\alpha_2 V_2 \mid \alpha_1 V_1) + (\alpha_2 V_2 \mid \alpha_2 V_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1^2 (V_1 \mid V_1) + \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 (V_1 \mid V_2)}_{\substack{=0 \text{ per ipotesi} \\ (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0)}} + \underbrace{\alpha_2 \alpha_1 (V_2 \mid V_1)}_{=0 \text{ per ipotesi}} + \alpha_2^2 (V_2 \mid V_2) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\alpha_1^2 (V_1 \mid V_1) + \alpha_2^2 (V_2 \mid V_2) = 0$$

$$\alpha_1^2 \underbrace{\|V_1\|^2}_{\neq 0} + \alpha_2^2 \underbrace{\|V_2^2\|}_{\neq 0} = 0$$

Ricordiamo che $\|V\|$ è il modulo (o lunghezza) del vettore v.

$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e quindi $V_1$ e $V_2$ sono L.I.

La stessa proprietà vale anche prendendo n vettori a 2 a 2 ortogonali, con $\forall$ n qualunque

ES $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base ortogonale

$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ matrice avente i vettori di $\mathcal{B}$ come colonne.

$A^T = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$A^T \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$\|V_1\|^2$ $\|V_2\|^2$ $\|V_3\|^2$

Se $\mathcal{B}$ è una base ortogonale allora la sua matrice $A = [V_1 | \dots | V_n]$ è molto speciale perchè $A^T A$ è diagonale.

Se la base $\mathcal{B} = \{V_1, \dots, V_n\}$ ha i vettori a 2 a 2 perpendicolari e questi vettori hanno modulo 1, allora la matrice $A = [V_1 | \dots | V_n]$ è tale che:

$\underbrace{A^T \cdot A = I}$

cioè $A^{-1} = A^T$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \hline \dots \\ \hline V_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 | \dots | V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|V_1\|^2 & & 0 \\ & \|V_2\|^2 & \\ 0 & & \|V_n\|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Qst tipo di base si dice $\boxed{\text{ORTONORMALE}}$

→ La nostra base $\mathcal{B}$ dell'es. prima non è ortonormale ma è ortogonale. Come la faccio diventare ortonormale? ~~la ...~~ Dividiamo per le lunghezze dei vettori.

$\|V_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$\|V_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

$\|V_3\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\|V_1'\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|V_2'\| = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$\|V_3'\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$B = \{V_1', V_2', V_3'\}$ È UNA BASE ORTONORMALE

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortonormale significa che è tale che

$$A^T \cdot A = I \quad \text{cioè} \quad A^{-1} = A^T$$

[una matrice ortogonale ha come inversa la sua trasposta]

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Le matrici con queste proprietà si chiamano matrici ortoganali (anche se si dovrebbero chiamare matrici ortonormale)

<u>Def.</u> Una matrice quadrata $A$ si dice MATRICE ORTOGONALE se $A^T = A^{-1}$, cioè $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$.

Ripasso:

- $v \in Aut(A, d_1)$ $w \in Aut(A, d_2)$
  $d_1 \neq d_2 \Rightarrow \{v, w\}$ sono indipendenti
  - questo vale anche nel caso generale di n autovettori relativi ad n autovalori diversi

- Una base si dice ORTONORMALE se:
  (1) $v_i \perp v_j$ per $i \neq j$
  (2) $\|v_i\| = 1$ per ogni $i$

Es: base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$

- Una MATRICE SIMMETRICA A ha proprietà speciali:

(1) $d_1 \neq d_2$ autovalori, $v \in Aut(A, d_1)$,
$w \in Aut(A, d_2) \Rightarrow v \perp w$
(2) tutti gli autovalori di A sono reali

- MATRICI ORTOGONALI
matrice A t.c. $A^{-1} = A^T$
- $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormale $\Leftrightarrow A = [v_1 | \dots | v_n]$ è ortogonale

$$A^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad \underbrace{A^T \cdot A}_{} = I$$
vuol dire che $A^T$ è l'inversa di A

- Come si trovano gli AUTOVALORI?
- Si pone $\det(A - dI) = 0$
- Si calcola $A - dI$ e poi se ne calcola il det e si pone uguale a 0 (polinomio caratteristico)
- Si calcolano i $d$ (che sono gli autovalori)

Es: $\mathcal{B}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ identità}$$
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\} \text{ base ortonormale}$$
per ogni angolo $\theta$

$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$ è ortogonale per ogni $\vartheta$

- Autovalori di $A_{\mathcal{B}}$?

$\det(A_{\mathcal{B}} - \lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta - \lambda & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta - \lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\det} (\cos\vartheta - \lambda)^2 - (-\sin^2\vartheta) = \cos^2\vartheta + \lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta + \sin^2\vartheta =$$

$(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1)$

$= \lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta + 1$

Pongo il $\det(A_{\mathcal{B}} - \lambda I) = 0$:

$\lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+\cancel{2}\cos\vartheta \pm \sqrt{\cancel{4}\cos^2\vartheta - \cancel{4}}}{\cancel{2}}$$

se $\vartheta \neq 0$

$\cos^2\vartheta - 1 < 0$

non ci sono autovalori reali

se $\vartheta = 0$

$\cos^2\vartheta - 1 = 0$

$\lambda = 1$ con molteplicità 2

polin. caratt: $(\lambda - 1)^2 = 0$

In questo caso

$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Data una base qualunque, come trovo una base ortonormale? (2)

Procedimento di GRAM-SCHMIDT

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}}_{\neq 0}$$

quindi B è effettivamente una base.

per calcolare questo determinante posso =
(1) fare il metodo classico (formula generale)
(2) fare il metodo di copiare 2 colonne (ma funziona solo per le matrici 3x3)
(3) ridurla e fare il prodotto dei pivot avendo l'accortezza di cambiare di segno ogni volta che cambio 2 righe

Prima trasformiamo B in una base ortogonale.

$v_1' = v_1$

$v_2' = v_2 - \mu v_1'$ dove $\mu = \dfrac{(v_2 | v_1')}{(v_1' | v_1')}$

$v_3' = v_3 - \eta_2 v_2' - \eta_1 v_1'$ dove $\eta_2 = \dfrac{(v_3 | v_2')}{(v_2' | v_2')}$ e $\eta_1 = \dfrac{(v_3 | v_1')}{(v_1' | v_1')}$

si divide x il vettore preced al quadrato

Notiamo che

$(v_1' | v_2') = (v_1' | v_2 - \mu v_1') = (v_1' | v_2) - \mu (v_1' | v_1') = 0 \iff$

$$\mu = \frac{(v_1' | v_2)}{(v_1' | v_1)}$$

Ricordare che
$(v | w_1 + w_2) = (v | w_1) + (v | w_2)$
$(v | \lambda w) = \lambda (v | w)$

Il prodotto scalare è un'applicazione $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che è lineare in ciascuna delle 2 componenti

(si dice applicazione "bilineare")

$(v_1|v_2') = (v_1'|v_2 - \mu v_1') = (v_1'|v_2) - \mu(v_1'|v_1') \overset{?}{=} 0 \Longleftrightarrow$

$\mu = \dfrac{(v_1'|v_2)}{(v_1'|v_1')}$

~~esea~~

Es

$(v_2|v_1') = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$ non sono $\perp$

$\mu = \dfrac{(v_2|v_1')}{(v_1'|v_1')} = \dfrac{2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \dfrac{2}{2} = 1$

$v_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è perpendicolare a $v_1'$.

verifico: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_2' \perp v_1'$

vado avanti:

$(v_3|v_2') = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -6 \quad v_3 \not\perp v_2'$

allora aggiusto

$v_3' = v_3 - \eta_2 v_2' - \eta_1 v_1'$ dove $\eta_2 = \dfrac{(v_3|v_2')}{(v_2'|v_2')} = \dfrac{-6}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} =$

$= \dfrac{-6}{6} = -1$

$\eta_1 = \dfrac{(v_3|v_1')}{(v_1'|v_1')} = \dfrac{6}{2} = 3$

$v_3' = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

verifica

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$$
$$\quad v_1 \qquad v_2 \qquad v_3$$

$$\mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ base ortogonale}$$
$$\quad v_1' \qquad v_2' \qquad v_3'$$

$$\|v_1'\|=\sqrt{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}=\sqrt{2} \qquad \|v_2'\|=\sqrt{6}$$

$$\|v_3'\|=\sqrt{3}$$

$$\mathcal{B}''=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

orto
normale

Adesso i vettori di $\mathcal{B}''$, oltre ad essere a due a due ortogonali, sono tutti di modulo 1.