# SISTEMI e MATRICI 3x3

26/10/2015

$$
(*)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}
$$

matrice coefficienti

vettore dei termini

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}
$$

APPLICAZIONE LINEARE = $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$
f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

Il sistema $(*)$ ha soluzione se e solo se $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$

tale che $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$

METODO DI RIDUZIONE DI GAUSS $\Rightarrow$ RENDERE TRIANGOLARE LA MATRICE $\begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

$\cdot 3 : 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 9$

$\cdot 2 : 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 6$

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 & \longrightarrow \text{II equazione} - 2 \cdot \text{I equazione} \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14 & \text{III equazione} - 3 \cdot \text{I equazione} \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0 + x_2 - 5x_3 = -2 \\ 0 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}
$$

PIVOT

$$
\text{III} - 2 \cdot \text{II} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0 + x_2 - 5x_3 = -2 \\ 0 + 0 + 9x_3 = 9 \Rightarrow x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{9} \end{pmatrix}
$$

PIVOT = coeff. sulla diagonale

$x_1 = -5 \qquad x_2 = 3$

$$
\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}
$$

verifica:

$$
f\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{OK}
$$

# DA MATRICE AD APPLICAZIONE LINEARE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{applicazione lineare associata} \quad f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{I col.}} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\text{II col}} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{III col.}}$$

es.

MOLTIPLICARE UNA MATRICE PER UN VETTORE?

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Termini noti

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Per esempio $A \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$= -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{REGOLA}}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \quad \text{Riga} = i \quad \text{colonna} = j$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix}$$

es. $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $= 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}$

$10 \leftarrow 2(-1) + (-3)(5) + (1)(7)$

$11 \leftarrow 2(0) + (-3)(-3) + (1)(2)$

$-9 \leftarrow 2(1) + (-3)(5) + (1)(4)$

RIGA × COLONNA

- $\bullet \to$ prodotto scalare tra 1ª riga e il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -10$
- $* \to$ prodotto scalare tra 2ª riga e vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 11$
- $* \to$ " " " 3ª " " " $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -9$

RIASSUMENDO → 2 MODI

- CON COMBINAZIONI LINEARI:

$$A = \underbrace{\left[ \vec{a}_1 \middle| \vec{a}_2 \middle| \vec{a}_3 \right]}_{\text{3 vettori colonna}} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3$$

- CON PRODOTTI SCALARI: RIGA X COLONNA

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \hline \vec{\alpha}_2 \\ \hline \vec{\alpha}_3 \end{bmatrix}}_{\text{3 vettori riga}} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{x} \\ \vec{\alpha}_3 \cdot \vec{x} \end{pmatrix}$$

# FORMULA GENERALE

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$

$b_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$

$b_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$

$$(A \cdot \vec{x})_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot x_j$$

Ad esempio se $i = 1$, $\sum_{j=1}^{3} a_{1j} \cdot x_j$

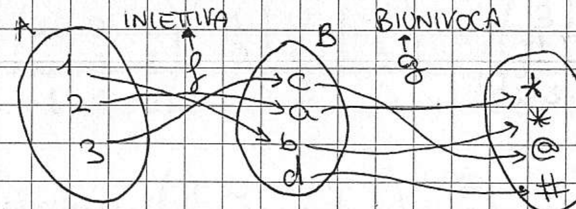
## COMPOSIZIONE DI FUNZIONI → PRODOTTO DI MATRICI

$f: A \to B \qquad g: B \to C$

Se l'immagine di una funzione $\subseteq$ (è inclusa) nel dominio di un'altra funzione, le 2 funzioni si possono comporre, $\underbrace{\text{prima } f \text{ e poi } g}$

$g \circ f$ → si legge da dx a sx

es.




$f(1) = b \qquad g(a) = \star$

$f(2) = a \qquad g(b) = ✳$

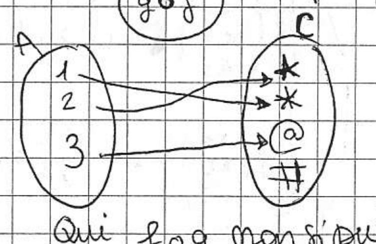
$f(3) = c \qquad g(c) = @$

$g(d) = \#$

$\text{Im} f = \{a, b, c\} \subseteq B$

es. $g \circ f : A \to C$

$g \circ f$ → si può fare




Qui $f \circ g$ non si può fare
NON è definito

es. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x + 1$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f$ NON È INIETTIVA es. $f(-2) = f(2) = 4$

$f$ " " SURIETTIVA es. $-3$ non è il quadrato di nessuno, cioè $-3 \notin \text{Im} f$

$g$ È INIETTIVA: devo dimostrare che $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

$g$ È SURIETTIVA? SÌ Preso qualunque $y \in \mathbb{R}$, esiste sempre un elemento $x$ tale che $g(x) = y$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \xmapsto{g} x+1 \xmapsto{f} (x+1)^2$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad 7 \xmapsto{g} 8 \xmapsto{f} 64$

$$(f \circ g)(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

es. $x = 7$ → DIVERSE

$x \xmapsto{f} x^2 \xmapsto{g} x^2+1 \qquad (g \circ f)(x) = x^2 + 1$

$7 \xmapsto{f} 49 \xmapsto{g} 50$

es. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

CON PRODOTTI SCALARI:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f \to A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad g \to B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ -10 \end{pmatrix}$$

VERIFICA CON COMBINAZ. LINEARI:

es. $f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$

es. $g\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + 13\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ -10 \end{pmatrix}$

COMPONGO:

PRIMA $f$
POI $g$

$g \circ f \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ → somma della 1ª e 3ª coordinata; → $-3 \cdot$ II coord. + 3ª coord.; → 1ª coord. − 3ª coord.

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ -3x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \xmapsto{g} \begin{pmatrix} (x_1 - x_3) + (2x_1 + 3x_2) \\ -3(3x_3) + (2x_1 + 3x_2) \\ (x_1 - x_3) - (2x_1 + 3x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} \circledast$$

$$(g \circ f)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO: Calcolare $f \circ g$

$f \circ g$ $\qquad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ $\qquad f \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 3\\2 & 3 & 0\end{pmatrix}$

PRIMA $g$
POI $f$

$$g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_3\\-3x_2+x_3\\x_1-x_3\end{pmatrix} \qquad g \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -3 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 3\\2 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -3 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & \boxed{2}\\3 & 0 & -3\\2 & \boxed{-9} & 5\end{pmatrix}$$

1ª riga, 3ª colonna

3ª riga, 2ª colonna

$$(f \circ g)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\0\\-9\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$$

Verifico:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \xmapsto{g} \begin{pmatrix}x_1+x_3\\-3x_2+x_3\\x_1-x_3\end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix}(x_1+x_3)-(x_1-x_3)\\3(x_1-x_3)\\2(x_1+x_3)+3(-3x_2+x_3)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & 2x_3\\3x_1 & & -3x_3\\2x_1 & -9x_2 & +5x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\0\\-9\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\3 & 0 & -3\\2 & -9 & 5\end{pmatrix}$$

# PRODOTTO DI MATRICI

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C}{\overset{\shortparallel}{g \circ f}} \longrightarrow B \cdot A = C$$

↳ corrisponde a fare il prodotto di matrici (anche x le matrici $A \times B \neq B \times A$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -9 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \circledast$$

COME SI RISOLVE $A \cdot \vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3$

$$A = [\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \vec{a}_3] \qquad B = [\vec{b}_1 | \vec{b}_2 | \vec{b}_3] \qquad A \cdot [\vec{b}_1 | \vec{b}_2 | \vec{b}_3]$$

$$A \cdot B = [A \cdot \vec{b}_1 | A \cdot \vec{b}_2 | A \vec{b}_3] \qquad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{b}_1 = b_{11} \vec{a}_1 + b_{21} \vec{a}_2 + b_{31} \vec{a}_3$$

$$A \cdot \vec{b}_2 = b_{12} \vec{a}_1 + b_{22} \vec{a}_2 + b_{32} \vec{a}_3$$

$$A \cdot \vec{b}_3 = b_{13} \vec{a}_1 + b_{23} \vec{a}_2 + b_{33} \vec{a}_3$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} 1^a \text{ COLONNA} & 2^a \text{ COLONNA} & 3^a \text{ COLONNA} \\ \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -9 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$1^a$ colonna: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$2^a$ colonna: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$3^a$ colonna: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$

**N.B.**
In genere
$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

Formula generale:

Se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ e $B = (b_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,h}}$

allora $A \cdot B = (C_{ik})_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,h}}$ dove $C_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}$

27/10/2015

# ESERCIZI SU RIDUZIONE DI GAUSS

(Es) Trovare 4 numeri tali che la media di 3 di loro + il 4° sono uguali a 12, 10, 8, 6

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \rightarrow \begin{cases} \frac{x_1+x_2+x_3}{3} + x_4 = 12 \\ \frac{x_1+x_2+x_4}{3} + x_3 = 10 \\ \frac{x_1+x_3+x_4}{3} + x_2 = 8 \\ \frac{x_2+x_3+x_4}{3} + x_1 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4 = 36 \\ x_1+x_2+3x_3+x_4 = 30 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4 = 24 \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4 = 18 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Applicazione lineare

$$f: \underset{4 = n° \text{ di incognite}}{\mathbb{R}^4} \longrightarrow \underset{4 = n° \text{ di equazioni}}{\mathbb{R}^4}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Questo sistema ha soluzione se e solo se $\begin{pmatrix} 36 \\ 30 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}$ è uno dei vettori $\in \operatorname{Im} f$, cioè voglio che il sistema sia uguale alla colonna dei termini noti

Matrice associata:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 36 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 30 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{II riga} - \text{I riga} \\ \text{III riga} - \text{I riga} \\ \text{IV riga} - 3\cdot\text{I riga}}]{\text{riduzione di Gauss}} \underset{A_1}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 36 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & -90 \end{array}\right)} \xrightarrow[\text{scambio di II e la III riga}]{E_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}} \underset{A_2}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 36 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & -90 \end{array}\right)}$$

Matrice associata al sistema; matrice dei termini noti; Matrice completa del sistema

$$\xrightarrow[\substack{\text{IV riga} + \\ + \text{la II riga}}]{E_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}} \underset{A_3}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 36 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -102 \end{array}\right)} \xrightarrow[\substack{\text{III riga} + \\ \text{III riga}}]{E_4 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}} \underset{A_4}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 36 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -108 \end{array}\right)}$$

- ora torno al sistema:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4 = 36 \longrightarrow \boxed{x_1 = 0} \\ 0 + 2x_2 + 0 - 2x_4 = -12 \longrightarrow \boxed{x_2 = 3} \\ 0 + 0 + 2x_3 - 2x_4 = -6 \longrightarrow \boxed{x_3 = 6} \\ 0 + 0 + 0 - 12x_4 = -108 \longrightarrow \boxed{x_4 = 9} \end{cases}$$

$\rightarrow$

• **CONCLUSIONI** = Questo procedimento funziona anche cambiando a piacere i termini noti e mi permette sempre di ottenere un'unica soluzione.
Quindi l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata al sistema è BIUNIVOCA

ESISTE LA SOLUZIONE: SURIETTIVA
+
SOLUZIONE UNICA: INIETTIVA

MATRICI IDENTITÀ

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ⊛ → Matrice identità, è come se fosse il numero 1, cioè se lo moltiplico x una qualsiasi matrice A, il risultato è una matrice A (sulla diagonale ci sono solo 1 e il resto sono zeri).

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

es. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{A}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \overset{A}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

A quale applicazione lineare corrisponde la matrice d'identità?

es. con quella 4x4 ⊛

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ → questi si chiamano vettori della BASE CANONICA

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$ → Funzione identità = lascia le cose come stanno
↓
si chiama anche id

$I \longrightarrow id$

$A \longrightarrow f$

$I \cdot A \longrightarrow id \circ f = \overset{A}{f}$

$A \cdot I \longrightarrow f \circ id = \underset{A}{f}$

# MATRICI DELLE MOSSE DI GAUSS

$$I = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{E_2} \xrightarrow[\text{IV riga} - 3\cdot\text{I riga}]{\text{II riga} - \text{I riga},\ \text{III riga} - \text{I riga}} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{E_1}$$

es. riprendo A: Applicando le mosse di Gauss di sopra si ottiene:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{E_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 36 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 30 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 24 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 18 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 36 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & -2 & -8 & -90 \end{array}\right)$$

$e_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad h : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$

PRIMA $e_1$ poi $h$, cioè $h \circ e_1$, NON SI PUÒ FARE

PRIMA $h$ poi $e_1$, cioè $e_1 \circ h$, SI PUÒ FARE

$e \circ h : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4 \rightsquigarrow$ Matrice $4 \times 5$ (4 righe, 5 colonne)

$$= \begin{pmatrix} \cdot & & & & \\ & \cdot & & -2 & \\ & & \cdot & & -12 \\ & -2 & & \cdot & \end{pmatrix}$$

II riga e IV colonna
III " e V "
IV " e II "
} ritorna uguale ad A

$A_1 = E_1 \cdot A\ ;\ A_2 = E_2 \cdot A_1 = \underbrace{E_2 \cdot E_1}\cdot A$

$$(E_4 (E_3 \cdot (E_2 \cdot (E_1 \cdot A)))) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

# INVERSI

2/11/2015

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 - x_3 = b \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = c \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III " } - 2\text{I "}]{\text{II riga} - \text{I riga}} \overset{E_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

$E_1$ applicata a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica $\underset{E_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\star]{\text{scambio II e III riga}} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} 7 \\ -7 \\ -2 \end{matrix}\right) \to \circledast \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \cdot (E_1 \cdot A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se $a = 7, b = 5, c = 7$

Ho che $\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} 7 \\ -7 \\ -2 \end{matrix}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \longrightarrow x_1 = 4 \\ -3x_2 - x_3 = -7 \longrightarrow x_2 = 2 \\ -2x_3 = -2 \longrightarrow x_3 = 1 \end{cases}$

GAUSS-JORDAN $\otimes$

$\circledast \longrightarrow$ II riga $- \frac{1}{2}$ III riga e poi I " $+ \frac{1}{2}$ III " $\longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} 6 \\ -6 \\ -2 \end{matrix}\right) \xrightarrow{\text{I riga} + \frac{1}{3}\text{II riga}} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{matrix}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow$ I riga OK, II " $\cdot (-1/3)$, III " $\cdot (-1/2)$ $\longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.\left|\boxed{\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}}\right) \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to$ è la soluzione

$\longrightarrow E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$

$$\overset{\star}{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overset{\otimes}{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{\sim}{E_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

conclusioni

$E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I$

Chiamo $M = E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$

$\boxed{M \cdot A = I} \longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ 2 & -1 & 1 & & & \end{array}\right] \xrightarrow{E_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_4} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -3 & 0 & -3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_5} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right]$$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3$

$A^{-1}$

$$A^{-1} = [b_1 | b_2 | b_3]$$

$$A \cdot b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad A \cdot b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad A \cdot b_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$[A \cdot b_1 | A \cdot b_2 | A \cdot b_3] = A \cdot \underbrace{[b_1 | b_2 | b_3]}_{A^{-1}} = A \cdot A^{-1}$$

Quindi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \\ x_1 + x_2 - x_3 = \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Jordan}]{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{matrix}}_{B} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Analogamente

$$A\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}1/3\\1/6\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$B = [\underline{b_1} | \underline{b_2} | \underline{b_3}]$$

$$b_1 = \begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix}1/3\\1/6\\-1/2\end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\0\end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \underline{I} \searrow \quad I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (A \cdot \underline{b_1} | A \cdot \underline{b_2} | A \cdot \underline{b_3}) = A \cdot B$$

D'altra parte

$$\underbrace{E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1}_{M} \cdot A = M \cdot A = \underline{I}$$

Dimostrazione che $\underline{M} = B$

$$M = M \cdot I = M \cdot A \cdot B = I \cdot B = B$$

→ M e B sono uguali e sono la matrice inversa $A^{-1}$

(il che significa che $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$)

- $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a_1 \quad 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = a_2 \quad 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = a_3 \quad 7 \end{cases}$$

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot \vec{x} = A^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = 1/6 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1/6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 1/6 \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = 1/6 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/6 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$ $\qquad -2/3 + 1/6 + 5/2 = \frac{-4+1+15}{6} = \frac{12}{6} = 2$

$x_1 + x_2 - x_3 = -3$ $\qquad -2/3 + 1/6 - 5/2 = \frac{-4+1-15}{6} = -\frac{18}{6} = -3$

ecc.

$$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xmapsto{f} x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f_A$ SURIETTIVA $\Leftrightarrow$ il sistema ha sempre una soluzione per ogni scelta dei termini noti (SI)

$f_A$ INIETTIVA $\Leftrightarrow$ per ogni scelta dei termini noti ho al max una soluzione (SI)

<u>CONCLUSIONE</u> Un sistema quadrato la cui matrice è A ha ed unica soluzione per ogni scelta dei termini noti se e solo se A è invertibile, cioè esiste la matrice inversa $A^{-1}$ t.c. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

In questo caso, la soluz. con i termini noti $\vec{a}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ si trova calcolando $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{a}$

(ES) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ Trovare l'inverso (se esiste)

# NUMERI COMPLESSI ($\mathbb{C}$)

$x^2 = -1$ non ha RADICI reali

$\boxed{i^2 = -1}$ $i$ = unità immaginaria

NUMERI COMPLESSI $\rightarrow$ $a+ib$ dove $a, b \in \mathbb{R}$

$\pi + 7i$

parte reale $\leftarrow \pi$ ; $\rightarrow 7$ = parte immaginaria

- $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -1$, $i^8 = 1$ ecc....

(es) $i^{213}$?

$$\begin{array}{r|l} 213 & 4 \\ 13 & 53 \\ 1 & \end{array}$$

$213 = 53 \cdot 4 + 1$

$i^{53 \cdot 4} = (i^4)^{53} = 1$

$i^{1002} = i^{1000} \cdot i^2 = -1$

$(7-2i)(5+3i) = 35 + \underbrace{21i - 10i}_{} - 6i^2$

$35 + 11i + 6 = 41 + 11i$

N.B. Tutti i numeri reali $r \neq 0$ hanno un inverso,

cioè un numero $r^{-1}$ t.c. $r \cdot r^{-1} = 1$

es. L'inverso di $\pi$ è $\frac{1}{\pi}$

$\rightarrow$ Esistono gli inversi dei numeri complessi $\neq 0$

es. L'inverso di $3+2i$ esiste?

Cerco un numero $a+ib$ tale che

$(a+ib)(3+2i) \overset{?}{=} 1$

$3a + 2ai + 3bi + 2bi^2 \overset{?}{=} 1$

$3a + (2a+3b)i - 2b \overset{?}{=} 1$

$\underbrace{(3a-2b)}_{\text{parte reale}} + \underbrace{(2a+3b)}_{\text{parte immaginaria}} i \overset{?}{=} 1$

$\begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases}$ $\quad a = 3/13$, $\quad b = -2/13$

$\left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13} i\right)(3+2i) = \frac{9}{13} + \cancel{\frac{6}{13} i} - \cancel{\frac{6}{13} i} - \frac{4}{13} \overset{-1}{i^2} = \frac{9}{13} + \frac{4}{13} = 1$

es. $(7+4i) : (2+i) = (7+4i) \cdot \frac{1}{2+i} \quad \frac{7+4i}{2+i} \quad \frac{1}{2+i}$

Idea → si considera il coniugato

$a+ib \xrightarrow{\text{coniugato}} a-ib$ SI CAMBIA SEGNO ALLA PARTE IMMAGINARIA

$7+4i \rightarrow 7-4i$

$-3i \rightarrow 3i$

$\frac{7+4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{(7+4i)(2-i)}{4-i^2}$

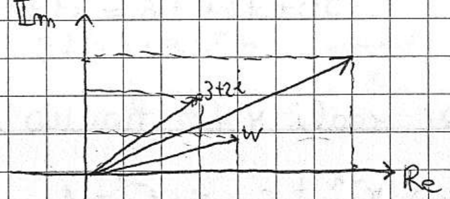
coniugato del denominatore

$\frac{(7+4i)(2-i)}{5} = \frac{1}{5}(14-7i+8i-4i^2) = \frac{1}{5}(14+i+4) =$

$= \frac{1}{5}(18+i) = \frac{18}{5} + \frac{1}{5} i$

$\frac{1}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{3-2i}{9-4i^2} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13} i$

# Piano complesso




$z = 3+2i$

$(a+ib \rightarrow (a,b)$

$w = 4+i$

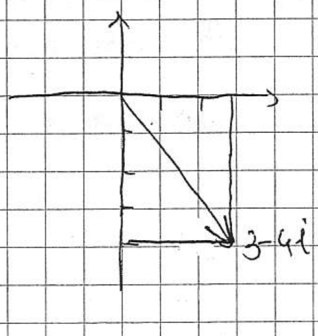
$z+w = (3+2i)+(4+i) = 7+3i$

La somma dei numeri complessi corrisponde alla somma dei vettori nel piano

→ MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO $z$

= lunghezza (o modulo) del vettore corrispondente

es. $z = 3-4i$




$|z| = \sqrt{(Re\,z)^2 + (Im\,z)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

**N.B.** $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (3-4i)(3+4i) = 9+16$

CONIUGATO DI $z$

3/11/2015

# INVERSI E DIVISIONI

CONIUGATO:

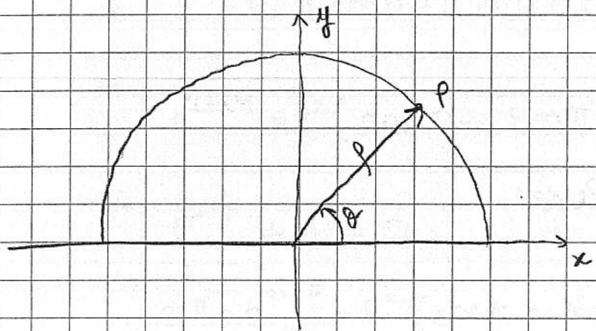
$$z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$$

$$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R} \geq 0$$

$$\frac{3-4i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{\cancel{12} - 9i - 16i + \cancel{12i^2}}{16+9} = \frac{-25i}{25} = -i$$

## Rappresentazione POLARE dei numeri complessi

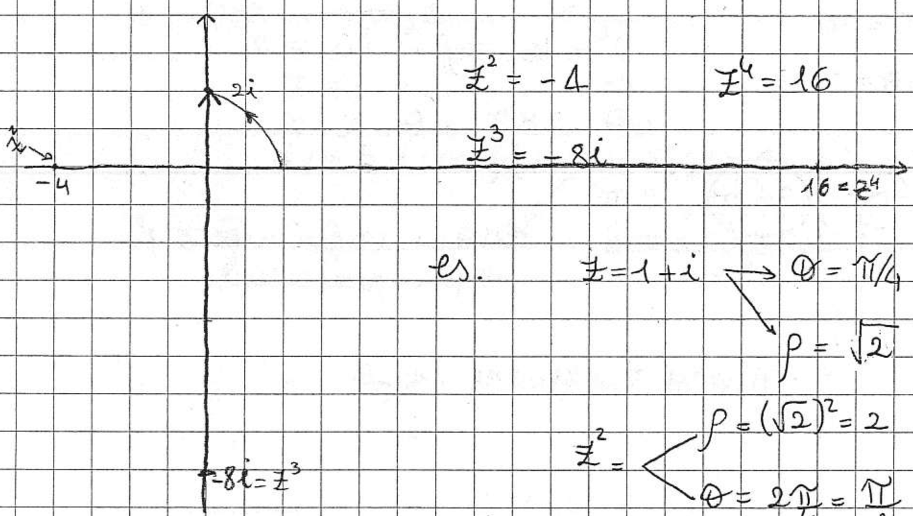



$\rho$ = MODULO = distanza da O

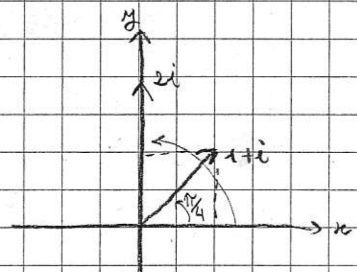
$\theta$ = l'angolo formato dal vettore $\vec{OP}$ con l'asse $x$ = ARGOMENTO

es.

$$z = 2i \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$$




es. $z = 1 + i \rightarrow \theta = \pi/4$, $\rho = \sqrt{2}$

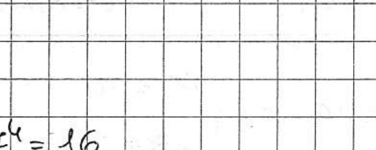



$$z^2 = \begin{cases} \rho = (\sqrt{2})^2 = 2 \\ \theta = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Verifica: $(1+i)^2 = \cancel{1} + \cancel{i^2} + 2i$

$\rightarrow z_1 = (\rho_1, \theta_1) \qquad z_2 = (\rho_2, \theta_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2, \theta_1 + \theta_2)$$




es. $z_1 = 2i$
$z_2 = 1 + i$

$$z_1 \cdot z_2 \begin{cases} \rho = 2\sqrt{2} \\ \theta = \frac{3}{4}\pi \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} a &= 2\sqrt{2}\cos\tfrac{3}{4}\pi = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 \\ b &= 2\sqrt{2}\sin\tfrac{3}{4}\pi = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = -2 + 2i$

$\rightarrow z_1 = (\rho_1, \theta_1) \quad z_1 = \rho_1 \cos\theta_1 + i\rho_1 \sin\theta_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$

$z_2 = (\rho_2, \theta_2) \quad z_2 = \rho_2 \cos\theta_2 + i\rho_2 \sin\theta_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) =$

$= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \sin\theta_2 + i \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) =$

$= \rho_1 \cdot \rho_2 ((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2)) =$

$= \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \leftarrow$ è il numero che ha modulo $\rho_1 \cdot \rho_2$ e argomento $\theta_1 + \theta_2$

QUINDI:

$z_1 = (\rho_1, \theta_1)$
$z_2 = (\rho_2, \theta_2)$
$\quad z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2, \theta_1 + \theta_2)$

es. $z^4 = +16$ Trovare le soluzioni complesse

Usiamo le coordinate polari:

$z \rightarrow (\rho, \theta)$

$z^4 \rightarrow (\rho^4, 4\theta) \qquad 16\ (16, 0 \rightarrow 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}))$

$z^4 = 16 \Rightarrow \begin{cases} \rho^4 = 16 \\ 4\theta = 2\pi k \end{cases} \qquad \rho^4 = 16 \Rightarrow \rho = \sqrt[4]{16} = 2$

$4\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = k \cdot \frac{\pi}{2}$

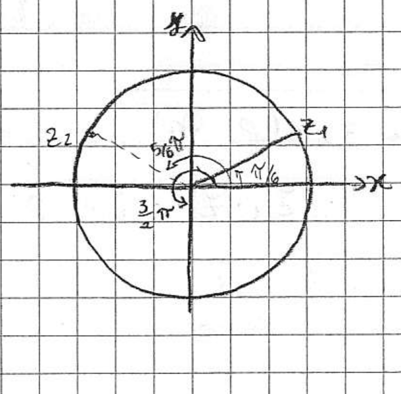
$\theta = \underset{k=0}{0}, \underset{k=1}{\pi/2}, \underset{k=2}{\pi}, \underset{k=3}{3/2\,\pi}, \underset{k=4}{2\pi} \rightarrow$ da qui in poi ripeto gli angoli precedenti

$z_1 = (2, 0) \longrightarrow 2$
$z_2 = (2, \pi/2) \longrightarrow 2i$
$z_3 = (2, \pi) \longrightarrow -2$
$z_4 = (2, 3/2\,\pi) \longrightarrow -2i$

} ognuna è soluzione di 16

$\rightarrow z^n = a$

$z^3 = 8i$




$z = (\rho, \theta) \qquad 8i = (8, \pi/2 + 2\pi k)$

$z^3 = (\rho^3, 3\theta) \qquad \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi \cdot k \end{cases}$

$z^3 = 8i$

$k = 0 \rightarrow \theta = \pi/6, \quad k = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi, \quad k = 2 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$

$\parallel$

$k = 3 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi \rightarrow z_1$

→ SOLUZIONI

$z_1 = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} + 2 \cdot i \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + i$

Verifico: $(\sqrt{3}+i)^3 = (\sqrt{3})^3 + i^3 + 3 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot i + 3(\sqrt{3})(i)^2 = \cancel{3\sqrt{3}} - i + 9i - \cancel{3\sqrt{3}} = 8i$

$z_2 = 2 \cdot \cos \frac{5}{6}\pi + 2i \sin \frac{5}{6}\pi = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2i \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{3} + i$

$z_3 = 2 \cos \frac{3}{2}\pi + 2i \sin \frac{3}{2}\pi = -2i$

## FORMULA DI EULERO

$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$

es. $e^{2+i\pi} = e^2(\cos\pi + i \sin\pi) = -e^2$

es. $e^{i\pi} + 1 = 0$

$e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0(\cos\pi + i \sin\pi) = -1$

Es $z = (2-i)^2$

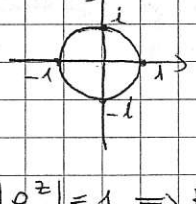
$w = 5 \cdot e^{i\pi/2} - 4i + 2$ $\qquad \frac{\overline{w}}{z} = ?$

$z = (2-i)^2 = 4 + i^2 - 4i = 3 - 4i$

$w = 5 \cdot (\cos\pi/2 + i \sin\pi/2) - 4i + 2 = 5i - 4i + 2 = i + 2 = 2 + i$

$\frac{\overline{w}}{z} = \frac{2-i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{6+8i-3i-4i^2}{9+16} = \frac{10+5i}{25} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

• Se $z^4 = 1$ e $z \in \mathbb{R}$ allora $Re(z) = 0$




→ queste sono le 4 soluzioni

• $|e^z| = 1 \Rightarrow Re\, z = 0$

$z = a + ib$

$e^{a+ib} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$

HA MODULO $e^a$ E ARGOMENTO $b$

$|e^{a+ib}| = 1$

$\parallel$

$e^a = 1$

$\Downarrow$

$a = 0$

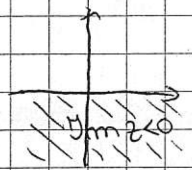
MODULO DI: $|e^{3+\pi i}| = e^3$

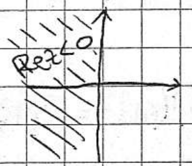
$|e^{-1+\pi i}| = e^{-1} = 1/e$

PARTE REALE DI: $e^{3+\pi i} = e^3(\cos\pi + i \sin\pi) = -e^3$

$e^{a+ib} : = e^a \cos b$

- $\mathrm{Im}(z) < 0 \Rightarrow \pi < \arg(z) < 2\pi$




es. $\mathrm{Im}(z) < 0 \Rightarrow \pi < \arg(z) < 2\pi$ VERA

es. $\mathrm{Re}(z) < 0 \Rightarrow 0 < \arg(z) < \pi$ FALSA

$$\Downarrow$$

$\mathrm{Re}(z) < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3}{2}\pi$ VERA

5/11/2015

# INVERTIBILITÀ DELLE MATRICI

$$A = \begin{pmatrix} 1^{*} & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & t & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I riga}]{\text{III riga}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & t & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambiare II e III riga}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & t & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

* Se ci fosse stato uno zero, avrei dovuto scambiare le righe

In generale, la mossa di Gauss
II riga $-\lambda\cdot$ I riga
III " $-\mu\cdot$ I "

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ -\mu & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa con il metodo di Gauss-Jordan

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

III riga $+\frac{t}{2}$ II riga

$$\begin{cases} x_1 + 0 - x_3 = 1 \\ 0 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 0 + 0 + \frac{t+2}{2}x_3 = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{t}{2} & | & 0 \end{pmatrix} \qquad 1+\frac{t}{2} \to \frac{t+2}{2}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \to \begin{cases} x_1 + 0 - x_3 = b_1 \\ 0 + tx_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 - 2x_2 + 0 = b_3 \end{cases} \qquad \text{es. } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \text{li inserisco nelle matrici}$$

$$\left(\frac{t+2}{2}\right)x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \text{ purché } t \neq -2$$

$$x_2 = 0 \qquad x_1 = 1$$

Con Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I r}]{\text{III r} -} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{scambio II e III r.}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[t/2 \text{ II riga}]{\text{III r} +} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{t+2}{2} & -t/2 & 1 & t/2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I r} + \frac{2}{t+2}\text{III r.}]{\text{II r} - \frac{2}{t+2}\text{III r}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{t+2} & \frac{2}{t+2} & \frac{t}{t+2} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{2}{t+2} & -\frac{2}{t+2} & \frac{2}{t+2} \\ 0 & 0 & \frac{t+2}{2} & -t/2 & 1 & t/2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\text{III riga}\cdot(2/t+2)]{\text{II riga}\cdot(-1/2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{t+2} & \frac{2}{t+2} & \frac{t}{t+2} \\ 0 & 1 & 0 & 1/t+2 & 1/t+2 & -1/t+2 \\ 0 & 0 & 1 & -t/t+2 & 2/t+2 & \frac{t}{t+2} \end{array}\right)$$

MATRICE INVERSA

$$A^{-1} = \frac{1}{t+2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & t \\ 1 & 1 & -1 \\ -t & 2 & t \end{pmatrix} \quad \text{perché } t \neq -2$$

Verifica

$$\frac{1}{t+2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & t \\ 1 & 1 & -1 \\ -t & 2 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{t+2}\begin{pmatrix} 2+t & 0 & 0 \\ 0 & t+2 & 0 \\ 0 & 0 & t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NB Anche $\frac{1}{t+2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & t \\ 1 & 1 & -1 \\ -t & 2 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**ES** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

Trovare la sua INVERSA DESTRA

$A = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$

Appl. lineare $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

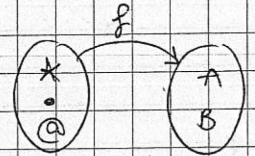
$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 0 + 3x_2 = \dots \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = \dots \end{cases}$$

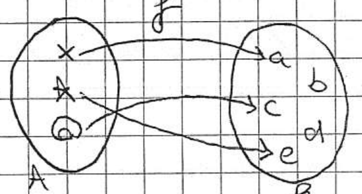
Quando una matrice inversa $A^{-1}$ esiste, allora $A^{-1}$ è sia inversa destra (cioè $A \cdot A^{-1} = I$) che inversa sinistra (cioè $A^{-1} \cdot A = I$)

N.B. La matrice inversa di A può esistere solo se A è quadrata

OSS. Se A è quadrata allora ha inversa sx $\Leftrightarrow$ ha inversa dx $\Leftrightarrow$ ha inversa




NON esistono funzioni iniettive
ESISTONO funzioni suriettive

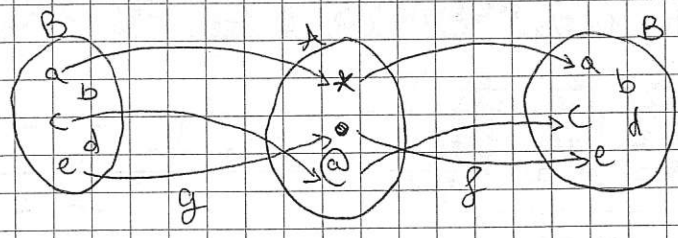



f iniettiva

$g : B \to A$

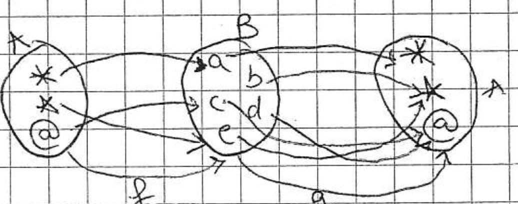
① esiste $g : A \to A$ t.c. $f \circ g : B \to B$ è la funzione d'identità?

② Esiste $g : B \to A$ t.c. $g \circ f : A \to A$ è la funzione identità?

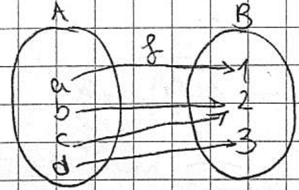



① NO. Ad esempio dovunque g "mandi" l'elemento b, componendo con f NON OTTERRÒ MAI b

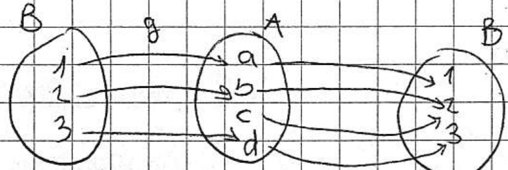
②




Sì, basta prendere una qualunque g che "rovescia le frecce" di f




$f$ suriettiva




$1 \xmapsto{g} a \xmapsto{f} 1$

$2 \xmapsto{g} b \xmapsto{f} 2$

$3 \xmapsto{g} d \xmapsto{f} 3$

$f \circ g = id_B$

PRIMA $g$ POI $f$

N.B. $g \circ f$ NON è l'identità. Ad esempio

$c \xmapsto{f} 2 \xmapsto{g} b$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

→ ⊛ Trovare $g_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ inversa dx di $f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ $\quad \underset{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}{f \circ g = id} \quad A \cdot B = I_{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+3e & 2b+3f \\ a-5c+7e & b-5d+7f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2a+3e = 1 \\ 2b+3f = 0 \\ a-5c+7e = 0 \\ b-5d+7f = 1 \end{cases}$$

→ IL PIVOT NON È MAI ZERO ←

→ Ho molte soluzioni. Ad esempio, ponendo $e = f = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} 2a + 0 = 1 \\ 2b + 0 = 0 \\ a - 5c = 0 \\ b - 5d = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ \frac{1}{2} - 5c = 0 \\ -5d = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{10} \\ d = -\frac{1}{5} \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9/11/2015

# SISTEMI NON QUADRATI

$$(S)\begin{cases} x_1+3x_2+\quad 2x_4=b_1 \\ x_3+4x_4=b_2 \\ x_1+3x_2+x_3+6x_4=b_3 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$f_A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ Applicaz. lineare

• Sistema $3\times4 \to A_{3\times4} \to f_A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$

3 equazioni
4 incognite

NON INIETTIVA

Le soluzioni (se ci sono) non sono uniche

• Sistema $4\times3 \to A_{4\times3} \to f_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$

NON SURIETTIVA

Esistono termini noti rispetto ai quali il sistema non ha soluzione

$$\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \xmapsto{f_A} x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

(S) ha soluzione $\iff \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\in \mathrm{Im} f_A$, cioè esiste $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$ t.c. $f_A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

**OSSERVAZIONE** Un sistema ha SEMPRE soluzione per ogni scelta dei termini noti $\iff$ l'applicazione lineare corrispondente è SURIETTIVA

Risolvo il sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III riga} - \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_3-b_1 \end{array}\right)$$

NB non posso avere pivot nella seconda colonna neanche scambiando righe

Quindi la 2ª colonna si lascia così e si passa alla terza

$$\xrightarrow{\text{III r.} - \text{II r.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-b_1-b_2 \end{array}\right)$$

Il terzo pivot non c'è, quindi ne abbiamo soltanto 2

N.B. Posso avere al max 1 pivot per riga

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \quad +2x_4=b_1 \\ x_3+4x_4=b_2 \\ 0 \quad =b_3-b_2-b_2 \end{cases}$$

CONCLUSIONE N°1 Il sistema ha soluzione $\iff b_3-b_1-b_2=0 \iff b_3=b_1+b_2$

Igitur se $b_3\neq b_1+b_2$, NIENTE SOLUZIONI

Se invece $b_3=b_1+b_2$ $\begin{cases} x_1+3x_2 \quad +2x_4=b_1 \\ x_3+4x_4=b_2 \end{cases}$ $\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

colonna Pivot, colonna libera, colonna Pivot, colonna libera

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$x_2$ e $x_4$ sono quindi VARIABILI LIBERE

Una volta stabilite quindi $x_2$ e $x_4$ (a piacimento), $x_1$ e $x_3$ sono determinate come sopra

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 2x_4 + b_1 \\ x_3 = -4x_4 + b_2 \end{cases}$$

QUINDI

$f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} P & L & P & L \end{matrix}$

$\mathrm{Im} f$ è lo SPAN delle colonne PIVOT di $A$, cioè $\mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE 2

Spazio delle colonne di $A$ $\quad Col(A) =$ span delle colonne

ESEMPIO $\quad Col(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$= \left\{\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \lambda_2\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}, \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \lambda_4\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$

tra loro sono INDIPENDENTI

TEOREMA $\quad Col(A) = \mathrm{Span}\{\text{colonne Pivot}\}$ → HA DIMENSIONE UGUALE AL NUMERO DEI PIVOT

Le colonne libere non servono perché sono combinazione lineare delle colonne pivot

Infatti $\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ e $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

PERCIÒ $\quad$ Il sistema (S) ha soluzione $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f_A$

TEOR. $\mathrm{Im} f_A = \mathrm{Span}\{\text{colonne Pivot}\}$

Nel nostro esempio (S) ha soluz. $\Leftrightarrow b_3 = b_1 + b_2$

$\mathrm{Im} f_A = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ cioè $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f_A \Leftrightarrow$ esistono $\lambda_1, \lambda_2$ $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} b_1 = \lambda_1 \\ b_2 = \lambda_2 \\ b_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = b_1 + b_2 \end{matrix}$

CONCLUSIONE $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f_A = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow b_3 = b_1 + b_2$ LO SAPEVO GIÀ

- CASO PARTICOLARE DEI TERMINI NOTI = 0

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \qquad +2x_4=0 \\ \qquad\qquad x_3+4x_4=0 \\ x_1+3x_2+x_3+6x_4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1+3x_2 \quad +2x_4=0 \; / \; x_1=-3x_2-2x_4 \\ \qquad x_3+4x_4=0 \; / \; x_3=-4x_4 \end{cases} \circledast$$

Ho 2 gradi di libertà x le soluzioni, cioè scelgo $x_2$ e $x_4$ a piacere, e poi determino $x_1$ e $x_3$ in base a $\circledast$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & P & L \end{matrix} \end{array}$$

Le colonne libere sono la 2 e la 4 $\rightarrow$ $x_2$ e $x_4$ variabili libere

SOLUZIONI SPECIALI = si ottengono ponendo tutte le variabili libere = 0 tranne una, che poniamo = 1

(1) $x_2=1$, $x_4=0$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=1 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}$ (2) $x_2=0$, $x_4=1$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=0 \\ x_3=-4 \\ x_4=1 \end{cases}$

$$\vec{S}_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{S}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(f_A)=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=0\right\} = \text{NUCLEO}$$

Tutte le soluzioni del sistema associato

TEOREMA

$$\mathrm{Ker}(f_A) \overset{def.}{=} \{\underbrace{\vec{x} \mid A\cdot\vec{x}=0}_{\text{soluzioni del sistema omogeneo associato}}\} = \mathrm{Span}\{\text{soluzioni speciali}\}$$

è un sottospazio di dimensioni = numero di variabili libere

Nel nostro esempio:

$$\mathrm{Ker}(f_A)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

TEOREMA FINALE: Tutte e sole le soluzioni di un sistema $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$ sono i vettori $\vec{x}=\vec{x}_p+\vec{v}$ dove $\vec{x}_p$ è una soluz. particolare qualunque e $\vec{v}\in\mathrm{Ker}(f_A)$ qualunque

ES) TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 3 \\ x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$$

① Il sist. ha soluz. $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{span}\{\text{colonne pivot}\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Avevamo visto che $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow b_3 = b_1 + b_2$ Quindi nel nostro, $5 = 2+3$ OK le soluz. esistono

② Troviamo una soluzione (qualunque)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 - b_2 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 3 \\ x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

Per trovare una soluz. particolare in modo facile, si pongono le variabili libere $x_2 = x_4 = 0$ e si trova $x_1 = 3$ e $x_3 = 2$

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(f_A) = \mathrm{Span}\{\text{sol. spec.}\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

③ L'insieme di TUTTE le soluzioni è:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ x_2 = \lambda_1 \\ x_3 = 2 - 4\lambda_2 \\ x_4 = \lambda_2 \end{cases}$$

al variare di $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

cioè ci sono "$\infty^2$ soluzioni"

• SE il sistema ha soluzioni, il sist. ha un'unica soluz. $\Longleftrightarrow$ non ci sono colonne libere, cioè se tutte le colonne sono colonne pivot. Infatti in questo caso $\operatorname{Ker} f_A = \{\vec{0}\}$ (vedremo poi che $\operatorname{Ker} f_A = \{0\} \Leftrightarrow f_A$ è iniettiva

$\rightarrow$ SISTEMA 5 EQUAZ. E 4 INCOGNITE

$A_{5\times4}$ $\quad f_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ NON SURIETTIVA

$\operatorname{Col}(A) = \operatorname{Im}(f_A) \subseteq \mathbb{R}^5$

dimensione = n° pivot $\leq 4$

$\operatorname{Ker}(f_A) = \operatorname{span}\{\text{sol. spec.}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

COROLLARIO DEI TEOREMI GIÀ VISTI

$$\underbrace{\operatorname{Dim}(\operatorname{Im} f_A)}_{\text{n° colonne pivot}} + \underbrace{\operatorname{Dim}(\operatorname{Ker}(f_A))}_{\text{n° colonne libere}} = \underbrace{4}_{\text{n° tutte colonne}}$$

Più in generale, se $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare, allora

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{ker} f) = m$$