ESERCITAZIONE SCRITTA di GEOMETRIA

23/11/2019

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, determinare il valore di verità (V=vero, F=falso)

1) Se $ad-bc=0$, il sistema $\begin{cases} aX+bY=b_1 \\ cX+dY=b_2 \end{cases}$ non ha mai soluzione

2) Se C è inversa sinistra di A e D è inversa sinistra di B, allora CD è inversa sinistra di AB

3) Esistono applicazioni lineari iniettive $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$

4) Ogni applicazione lineare $f: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ è suriettiva

5) Se $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un'appl. lineare biunivoca, allora $m=n$

6) $\mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$

7) Le coordinate di $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

8) $N(A) \subseteq N(A \cdot B)$

9) Mediante la riduzione di Gauss-Jordan stabilire per quali valori di t la seguente matrice e' invertibile, e determinarne l'inversa

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

10) Determinare ker(f) e Im(f) dove $f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ e' l'appl. lineare la cui matrice associata e'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11) Trovare E^{-1} dove E e' la matrice corrispondente alle mosse di Gauss per matrici con 3 righe, che sostituisce la II riga con la II riga $- \frac{3}{2}$ I riga.

SOLUZIONI

1) Falso. Ad esempio se $a=1$, $b=2$, $c=2$, $d=4$ e $b_1=1$, $b_2=2$

il sistema $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ ha infinite soluzioni

(è l'intersezione di una retta con se stessa), eppure

$ad-bc = 4-4=0$

2) Falso. Esistono matrici $A_{4\times 3}$ invertibili a sinistra

e matrici $B_{3\times 2}$ invertibili a sinistra.

Se $C\cdot A = I$, allora C è 3×4 e

se $D\cdot B = I$, allora D è 2×3.

Adesso $A\cdot B$ è una matrice 4×2 ma

$C\cdot D$ NON è definita.

Viceversa, se C è inversa sinistra di A

e D è inversa sinistra di B, allora

$D\cdot C$ è inversa sinistra di $A\cdot B$. Infatti,

$$(D\cdot C)(A\cdot B) = D\cdot(C\cdot A)\cdot B = D\cdot I\cdot B = D\cdot B = I$$

3) Vero. Ad esempio $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ è un'appl. lineare

$f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$ iniettiva

4) Falso. Ad esempio l'applicazione lineare banale t.c. $f(\vec{x}) = 0$ per ogni $\vec{x} \in R^7$ NON e' suriettiva.

5) Vero. Infatti $f: R^m \to R^n$ appl. lineare iniettiva $\Rightarrow m \leq n$, e $f: R^m \to R^n$ appl. lineare suriettiva $\Rightarrow m \geq n$.

6) Vero. Infatti per ogni $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in R^2$ esistono x_1, x_2 t.c. $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, visto che quella combinazione lineare equivale a

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = b_1 \\ 5x_1 + 3x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Si tratta di un sistema 2x2 che ha sempre soluzione (ed unica) per ogni scelta di b_1, b_2 del momento che $\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 3 + 10 \neq 0$

7) Vero. Infatti $1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

8) Falso. Ad esempio se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ allora $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in N(A)$, mentre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin N(A \cdot B)$

Tuttavia vale l'inclusione $N(B) \subseteq N(A \cdot B)$

Infatti se $B \cdot \vec{x} = 0$, allora $(A \cdot B) \cdot \vec{x} = A \cdot (B\vec{x}) =$
$= A \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

9) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II} \text{ e } \mathrm{III}]{\text{scambio}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}+\frac{t}{2}\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{t+2}{2} & -\frac{t}{2} & 1 & \frac{t}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}+\frac{2}{t+2}\mathrm{III}]{\mathrm{II}-\frac{2}{t+2}\mathrm{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{t+2} & \frac{2}{t+2} & \frac{t}{t+2} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{2}{t+2} & -\frac{2}{t+2} & \frac{2}{t+2} \\ 0 & 0 & \frac{t+2}{2} & -\frac{t}{2} & 1 & \frac{t}{2} \end{array}\right)$$

La matrice A_t è invertibile $\Leftrightarrow$ $\frac{t+2}{2} \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -2$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}\cdot\frac{2}{t+2}]{-\frac{\mathrm{II}}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{t+2} & \frac{2}{t+2} & \frac{t}{t+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{t+2} & \frac{1}{t+2} & -\frac{1}{t+2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{t}{t+2} & \frac{2}{t+2} & \frac{t}{t+2} \end{array}\right)$$

Quando $t \neq -2$ $\quad A_t^{-1} = \frac{1}{t+2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & t \\ 1 & 1 & -1 \\ -t & 2 & t \end{pmatrix}$

10)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}-2\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\ e\ \mathrm{IV}]{\text{Scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{V}+\mathrm{III}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{V}-2\mathrm{IV}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

La II colonna e la VI colonna sono LIBERE,
le altre sono PIVOT.

Troviamo le 2 soluzioni speciali.

Il sistema ridotto e'

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ -x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$$

Le variabili libere sono x_2 e x_5.

/4

Pongo $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$ ed ottengo:

$x_6 = 0$; $-x_4 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$; $x_3 + 0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$x_1 + 2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$.

Dunque $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' la prima soluzione speciale.

Adesso pongo $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_5 = 1 \end{cases}$ ed ottengo:

$1 + x_6 = 0 \Rightarrow x_6 = -1$; $-x_4 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$;

$x_3 + 0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$; $x_1 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

Dunque $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e' la seconda soluzione speciale.

$$\ker f = \mathrm{Span}\{\vec{s}_1, \vec{s}_2\} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\text{colonne pivot}\} =$$

$$= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

11) La matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'inversa E^{-1} e' la matrice che corrisponde alla mossa di Gauss inversa che sostituisce la II riga con la II riga $+ \frac{3}{2}$ I riga, cioe'

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$