Ingegneria Edile-Architettura – Design Industriale

Compito di Geometria

23 Giugno 2025
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.] OK

Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione, e scriverle sia in forma polare che in forma cartesiana:

$$e^{\overline{z}} - 4\,e^{2z} \;=\; 0.$$

Esercizio 2. **[10 pt.]** OK

Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali:

- $V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.
- $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

1. Trovare una base di V.
2. Trovare una base di W.
3. Descrivere V in forma implicita, cioè come l'insieme delle soluzioni di un'equazione o di un sistema di equazioni lineari omogenee.
4. Trovare una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.
5. Dimostrare che il sottospazio $V + W = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. [11 pt.] OK

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.

2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.

3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Esercizio 4. [6pt.] FARE

Determinare tutte le applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le seguenti proprietà, scrivendone le matrici associate rispetto alla base canonica:

1. $(1, 0, 0)$ è un autovettore di f di autovalore $\lambda = -1$.
2. $T(0, 1, 0)$ è un vettore non nullo che appartiene a Span $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
3. T non è invertibile.

Determinare inoltre quali delle applicazioni lineari che soddisfano le proprietà di sopra non sono diagonalizzabili.