Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

3 Giugno 2025

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se la matrice A ha tanti pivot quante righe allora ogni sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ha soluzione.	☒	☐
2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.	☐	☒
3) Se $A = \{n^2 - n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{N}\}$, allora $A \cap B$ contiene infiniti elementi.	☐	☒
4) Se una matrice 3×3 ha tre autovalori distinti allora è diagonalizzabile.	☒	☐
5) Se $z \neq 0$ è un numero immaginario puro allora z^4 è un numero reale negativo.	☐	☒
6) $w_1 = (-1, 2, 3)$, $w_2 = (1, -1, 1)$, $w_3 = (2, -1, 0)$ e $w_4 = (0, 1, 0)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.	☐	☒
7) Se la ridotta di una matrice quadrata ha una riga di zeri allora non è invertibile.	☒	☐
8) Se v_1 e v_2 sono autovettori di autovalore λ allora $v_1 + v_2$ è autovettore di autovalore 2λ.	☐	☒
9) Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^5$ linearmente indipendenti. Allora $V = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ ha dimensione 3.	☒	☐
10) Siano $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ due applicazioni lineari. Se $\ker(S) \neq \{0\}$ allora anche $\ker(T \circ S) \neq \{0\}$.	☒	☐
11) Se il prodotto $A \cdot B$ di due matrici quadrate è invertibile, allora sia A che B sono invertibili.	☒	☐
12) Per ogni numero complesso z vale l'uguaglianza $\overline{(z^3)} = (\overline{z})^3$.	☒	☐

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

– 3 Giugno 2025 –

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Siano $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ due applicazioni lineari. Se $\ker(T) = \{0\}$ allora anche $\ker(T \circ S) = \{0\}$.	☐	☒
2) Se v_1 e v_2 sono autovettori di autovalore λ allora $v_1 + v_2$ è autovettore di autovalore 2λ.	☐	☒
3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.	☐	☒
4) Se la ridotta di una matrice quadrata ha una colonna libera allora non è invertibile.	☒	☐
5) Se una matrice 2×2 ha due autovalori distinti allora è diagonalizzabile.	☒	☐
6) $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_1 = (1, -2, -3)$, $v_3 = (2, -1, 0)$ e $v_4 = (0, 0, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.	☐	☒
7) Per ogni numero complesso z vale l'uguaglianza $(\overline{z})^2 = \overline{(z^2)}$.	☒	☐
8) Se $z \neq 0$ è un numero immaginario puro allora z^4 è un numero reale positivo.	☒	☐
9) Se il determinante $\det(A \cdot B) \neq 0$ allora sia A che B sono invertibili.	☒	☐
10) Se la matrice B ha tante righe quanti pivot allora ogni sistema lineare $B \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ha soluzione.	☒	☐
11) Siano $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^4$ linearmente indipendenti. Allora $V = \mathrm{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$ ha dimensione 3.	☒	☐
12) Se $X = \{2m + 1 \mid m \in \mathbb{N}\}$ e $Y = \{n^2 + n \mid n \in \mathbb{N}\}$, allora $X \cap Y$ contiene infiniti elementi.	☐	☒

Ingegneria Edile-Architettura – Design Industriale

Compito di Geometria

3 Giugno 2025
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]

Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 - 16(\overline{z})^2 = 0.$$

Usiamo le coordinate polari $z \rightsquigarrow (\rho, \theta)$

$z^4 \rightsquigarrow (\rho^4, 4\theta)$

$\overline{z} \rightsquigarrow (\rho, -\theta) \Rightarrow (\overline{z})^2 = (\rho^2, -2\theta) \Rightarrow 16(\overline{z})^2 = (16\rho^2, -2\theta)$

$$z^4 = 16(\overline{z})^2 \iff \begin{cases} \rho^4 = 16\rho^2 \\ 4\theta = -2\theta + 2k\pi \end{cases}$$

$\rho^4 = 16\rho^2 \iff \rho^2(\rho^2 - 16) = 0 \Rightarrow \rho = 0$ o $\rho = 4$

$4\theta = -2\theta + 2k\pi \iff 6\theta = 2k\pi \iff \theta = k\pi/3$

$\rho = 0 \Rightarrow z_0 = 0$ soluzione

$\theta = 0, \pi/3, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$ (poi si ripetono)

Quindi le seguenti sono soluzioni:

$$\begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow z_1 = 4$$

$$\begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = \pi/3 \end{cases} \Rightarrow z_2 = 4\left(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3\right) =$$
$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\, i$$

$$\begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = 2/3\, \pi \end{cases} \Rightarrow z_3 = 4\left(\cos 2/3\, \pi + i \sin 2/3\, \pi\right) =$$
$$= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}\, i$$

$$\begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = \pi \end{cases} \Rightarrow z_4 = 4 \cdot \left(\cos \pi + i \sin \pi\right) = -4$$

$$\begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = 4/3\, \pi \end{cases} \Rightarrow z_5 = 4\left(\cos 4/3\, \pi + i \sin 4/3\, \pi\right) =$$
$$= 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -2 - 2\sqrt{3}\, i$$

$$\begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = 5/3\, \pi \end{cases} \Rightarrow z_6 = 4\left(\cos 5/3\, \pi + i \sin 5/3\, \pi\right) =$$
$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2 - 2\sqrt{3}\, i$$

Esercizio 2. **[11 pt.]**
Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali:

- $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$.
- $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

1. Trovare una base di V.
2. Trovare una base di W.
3. Descrivere W in forma implicita, cioè come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.
4. Trovare una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.
5. Dimostrare che il sottospazio $V + W = \mathbb{R}^4$.

1. Usando le variabili libere x_2, x_3 e x_4 si ottiene che

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 - x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ è una base di V

quindi $\dim V = 3$

2. Metto i vettori come colonne e riduco.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\text{II} \leftrightarrow \text{III}$ scambio

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-2\text{II}]{\text{III}+2\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\quad P \quad P \quad L$

Il terzo vettore e' linearmente dipendente dei primi due.

Una base di W e' $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

quindi $\dim W = 2$

3. $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in W \iff \exists \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$

cioe' se e solo se il seguente sistema ha soluzione:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = b_1 \\ \lambda_1 = b_2 \\ -\lambda_2 = b_3 \\ -\lambda_1 = b_4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b_1 \\ 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & b_3 \\ -1 & 0 & b_4 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}+\mathrm{I}]{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b_1 \\ 0 & 2 & b_2-b_1 \\ 0 & -1 & b_3 \\ 0 & -2 & b_4+b_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{scambio } \mathrm{II} \Leftrightarrow \mathrm{III}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b_1 \\ 0 & -1 & b_3 \\ 0 & 2 & b_2-b_1 \\ 0 & -2 & b_4+b_1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}-2\mathrm{II}]{\mathrm{III}+2\mathrm{II}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b_1 \\ 0 & -1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2-b_1+2b_3 \\ 0 & 0 & b_4+b_1-2b_3 \end{array}\right)$$

Questo sistema ha soluzione $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} b_1 - b_2 - 2b_3 = 0 \\ b_1 - 2b_3 + b_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

4. Il sottospazio intersezione e'

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$= \ker A$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II}\,\&\,\mathrm{III}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & P \end{matrix} \end{array}$$

La variabile libera e' x_3.

Poniamo $x_3 = 1$
nel sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_4 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0$

$x_1 + 0 - 2 \cdot 1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

Quindi

$V \cap W = \ker A = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow$ base di $V \cap W$

ha dimensione 1

5. Per la formula di Grassman

$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$

$= 3 + 2 - 1 = 4$

Quindi $V + W = \mathbb{R}^4$

Esercizio 3. [10 pt.]

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

1.) Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P_\lambda(A) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & 9 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -6 & 0 & -8-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 7-\lambda & 9 \\ -6 & -8-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)\left[(7-\lambda)(-8-\lambda)+54\right]$$

$$= (-2-\lambda)(-56-7\lambda+8\lambda+\lambda^2+54) = (-2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) =$$

$$= (-2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1) = -(\lambda+2)^2(\lambda-1)$$

$\lambda = -2$ autovalore di molt. alg. 2

$\lambda = 1$ autovalore di molt. alg. 1

2.) $\underline{\lambda = -2}$

$$Aut_A(-2) = \ker(A + 2 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + \frac{2}{3} I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

x_2 e x_3 variabili libere

$$\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \quad \{ 9x_1 + 9x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{matrix} \quad \{ 9x_1 + 9x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base dell'autospazio $Aut_A(-2)$ e' $\mathcal{B} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$

$\underline{\lambda = 1}$

$$Aut_A(1) = \ker(A - 1 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

x_3 variabile libera

$x_3 = 1 \qquad \begin{cases} 6x_1 \quad +9x_3 = 0 \\ \quad -3x_2 \quad = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_2 = 0 \quad \& \quad 6x_1 + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}$

$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Una base dell'autospazio $Aut_A(1)$ e' $\mathcal{B} = \{ \vec{V}_3 \}$

3.) La matrice "cambio di base"

$S = \left(\vec{V}_1 \middle| \vec{V}_2 \middle| \vec{V}_3 \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e' tale che

$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e' diagonale

Esercizio 4. [6pt.]

Determinare tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le seguenti proprietà, scrivendone le matrici associate rispetto alla base canonica:

1. $(1, 0, 0)$ è un autovettore di f di autovalore $\lambda = 2$.
2. $f(0, 0, 1)$ è un vettore non nullo che appartiene sia al piano $x_1 - x_3 = 0$ che al piano $x_2 = 0$.
3. f non è invertibile.

Determinare tutte le applicazioni lineari con le proprietà di sopra che non sono diagonalizzabili.

Sappiamo da 1. che $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

Inoltre sappiamo da 2. che $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

è tale che $x_1 - x_3 = 0$, cioè $x_1 = x_3$, ed inoltre $x_2 = 0$

Quindi $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\\a\end{pmatrix}$ dove $a \in \mathbb{R}$ qualunque.

Scriviamo la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica:

$$A = \left(f(e_1) \middle| f(e_2) \middle| f(e_3) \right) = \begin{pmatrix} 2 & b & a \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & a \end{pmatrix}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ qualunque.

Usiamo infine la proprietà 3, che ci dice che $\det A = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & b & a \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & a \end{pmatrix} = c \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{pmatrix} = c \cdot 2a = 0$$

Visto che $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ e' non nullo, $a \neq 0$

e quindi deve essere $c = 0$, e perciò

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & a \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & b & a \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & d & a-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & a \\ 0 & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(2-\lambda)(a-\lambda) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-a).$$

Se $a \neq 0, 2$ abbiamo 3 autovalori reali distinti e quindi A e' diagonalizzabile.
Ricordiamo che vista la 2., $a \neq 0$

Se $a=2$ allora $\lambda=2$ ha molt. alg. 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 2 \end{pmatrix}$$

$$Aut_A(2) = \ker(A-2I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $e_1, e_3 \in \ker(A-2I)$

quindi $Aut_A(2)$ ha dimensione 2, cioè $\lambda=2$ ha molt. geom. 2. In questo caso A è diagonalizzabile.

Concludendo una matrice A soddisfa 1., 2., 3. se e solo se A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & a \end{pmatrix}$$

con $a, b, d \in \mathbb{R}$ qualunque ma $a \neq 0$.

Una tale A è sempre diagonalizzabile.