Ingegneria Edile-Architettura – Design Industriale

Compito di Geometria

3 Giugno 2025
Tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]

Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 - 16(\overline{z})^2 \;=\; 0.$$

Esercizio 2. [11 pt.]

Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali:

- $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$.
- $W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Trovare una base di V.
2. Trovare una base di W.
3. Descrivere W in forma implicita, cioè come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.
4. Trovare una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.
5. Dimostrare che il sottospazio $V + W = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. [10 pt.]

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Esercizio 4. [6pt.]

Determinare tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfano le seguenti proprietà, scrivendone le matrici associate rispetto alla base canonica:

1. $(1, 0, 0)$ è un autovettore di f di autovalore $\lambda = 2$.
2. $f(0, 0, 1)$ è un vettore non nullo che appartiene sia al piano $x_1 - x_3 = 0$ che al piano $x_2 = 0$.
3. f non è invertibile.

Determinare tutte le applicazioni lineari con le proprietà di sopra che non sono diagonalizzabili.