Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

15 Luglio 2024
tempo a disposizione : 120 minuti

Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 + 2z^3 + z^2 = 4$$

Esercizio 2. **[10 pt.]**
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata dalla seguente matrice nella base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare l'insieme $\mathcal{S}_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (2,3,2)\}$.
2. Determinare la matrice associata alla funzione $g(v) = f(f(v))$ rispetto alla base canonica.
3. Determinare la matrice associata a f^{-1} rispetto alla base canonica.
4. Determinare l'insieme $\mathcal{S}_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid g(v) = f^{-1}(v)\}$.

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.

2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.

3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 4. [6pt.]

Un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un *proiettore* se, dato qualunque vettore $v \in \mathbb{R}^2$, vale $f(f(v)) = f(v)$.

1. Trovare un proiettore f_1 diverso dalla funzione identità $x \mapsto x$ e dalla funzione nulla $x \mapsto 0$.

2. Trovare, se esiste, un proiettore f_2 tale che $f_2(1, 2) = (3, 3)$.

3. Trovare, se esiste, un proiettore f_3 avente l'autovalore $\lambda = 2$.