Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

A

25 Gennaio 2024

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) $\lambda = 0$ è autovalore di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.	☑	☐
2) $\det(-A) = -\det(A)$.	☐	☑
3) Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene allo Span di $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.	☐	☑
4) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un'appl. lineare iniettiva allora $m \leq n$.	☑	☐
5) Se λ_1 e λ_2 sono autovalori di A allora $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ è un autovalore di A.	☐	☑
6) Il modulo della differenza di due numeri complessi è uguale alla differenza dei moduli.	☐	☑
7) Se $\dim(V) = \dim(W) = \dim(V \cap W) = 2$ allora $\dim(V + W) = 2$.	☑	☐
8) Se f non è iniettiva allora ogni composizione $g \circ f$ non è iniettiva.	☑	☐
9) Se $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ allora A è incluso in B.	☑	☐
10) La funzione esponenziale complessa $z \mapsto e^z$ è iniettiva.	☐	☑
11) Se un'applicazione lineare non è suriettiva allora è iniettiva.	☐	☑
12) Se un insieme di vettori genera $\mathbb{R}^4$ allora contiene almeno quattro vettori.	☑	☐

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

B

— **25 Gennaio 2024** —

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A.	☐	☒
2) Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene allo Span di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.	☐	☒
3) Se un'appl. lineare non è iniettiva allora è suriettiva.	☐	☒
4) Se $\dim(V) = \dim(W) = \dim(V+W) = 2$ allora $\dim(V \cap W) = 2$.	☑	☐
5) $\det(A) = 0$ se e solo se $\det(-A) = 0$.	☑	☐
6) Se un insieme di vettori genera $\mathbb{R}^4$ allora contiene al più quattro vettori.	☐	☒
7) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un'appl. lineare suriettiva allora $m \geq n$.	☑	☐
8) L'equazione complessa $e^z = 0$ ha infinite soluzioni.	☐	☒
9) Se $A = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ allora A è incluso in B.	☐	☒
10) $\lambda = 0$ è autovalore di $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.	☑	☐
11) Il modulo della somma di due numeri complessi è uguale alla somma dei moduli.	☐	☒
12) Se f non è suriettiva allora ogni composizione $g \circ f$ non è suriettiva.	☐	☒

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 25 Gennaio 2024

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$z(z^3+8)=0$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$e^{2z+3}=1.$$

1) $z(z^3+8)=0 \Rightarrow z=0$ oppure $z^3+8=0$

$z=(\rho,\theta) \Rightarrow z^3=(\rho^3,3\theta)$ e $-8=(8,\pi)$

$z^3=-8 \Rightarrow (\rho^3,3\theta)=(8,\pi)$

$\begin{cases} \rho^3=8 \Rightarrow \rho=2 \\ 3\theta=\pi+2k\pi \Rightarrow \theta=\pi/3+k\cdot 2\pi/3 \Rightarrow \theta=\pi/3,\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi \end{cases}$

(poi si ripetono)

Dunque le soluzioni sono:

$z_0=0$

$z_1=(2,\pi/3) \rightsquigarrow z_1=2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)=1+i\sqrt{3}$

$z_2=(2,\pi) \rightsquigarrow z_2=-2$

$z_3=(2,\frac{5}{3}\pi) \rightsquigarrow z_3=2(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi)=1-i\sqrt{3}$

2) Ricordiamo che

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

ha modulo $\rho = e^x$ ed argomento $\theta = y$.

Se $z = a + ib$,

$e^{2z+3} = e^{(2a+3)+i\cdot 2b}$ ha coordinate polari

$(e^{2a+3}, 2b)$. Allora $e^{2z+3} = 1 \iff$

$$\begin{cases} e^{2a+3} = 1 \Rightarrow 2a+3 = 0 \Rightarrow a = -3/2 \\ 2b = 0 + 2k\pi \Rightarrow b = k\pi \end{cases}$$

Le infinite soluzioni sono tutti i numeri complessi della forma $z = -\frac{3}{2} + k\pi i$ dove $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio 2. [8 pt.]

Considerare le seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base del nucleo di A.
2. Determinare la dimensione dell'immagine di A.
3. Determinare una base dell'immagine della trasposta A^T.
4. Determinare una base dell'immagine e una base del nucleo della matrice $B = A^T \cdot A$.

1) Riduciamo la matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+2I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

C'e' una variabile libera, quindi dimensione $(\ker A) = 1$.

Troviamo la soluzione speciale ponendo la variabile libera $x_3 = 1$ nel sistema ridotto $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \\ x_2 + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = -4 \end{cases} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$ e' la soluzione speciale

Una base di $\ker(A)$ e' $\{\vec{S}\}$

2) Abbiamo visto dalla riduzione precedente che ci sono 2 colonne pivot, quindi
$\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$

3) $$ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-2I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P \end{matrix} \end{array} $$

Entrambe le colonne sono pivot, quindi
$\dim(\mathrm{Im}\,{}^tA) = 2$ ed una base e' data dalle colonne pivot della matrice iniziale, cioe'

$$ \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} $$

4) $$ {}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} $$

Riduciamo:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{5\cdot II \\ 5\cdot III}]{2\cdot I} \begin{pmatrix} 10 & -4 & 4 \\ -10 & 5 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-I]{II+I}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-4II} \begin{pmatrix} 10 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} P & P & L \end{matrix}$$

Le prime due colonne sono pivot, quindi una base dell'immagine è $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

x_3 è la variabile libera. Troviamo la soluzione speciale:

$x_3 = 1$

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 & \Rightarrow 10x_1 - 4x_2 + 4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 + 4 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$x_2 = -4$

$10x_1 + 16 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi una base del nucleo è $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Un modo alternativo per rispondere è il seguente:

- Abbiamo visto che $\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker A$ (vedi domanda 1))

  quindi $\vec{s} \in \ker({}^tA \cdot A)$

  (infatti $A \cdot \vec{s} = \vec{0} \Rightarrow ({}^tA \cdot A)(\vec{s}) = {}^tA(\vec{0}) = \vec{0}$)

- $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  sono vettori linearmente indipendenti (formano la base di Im A perché sono le colonne pivot di A)

  ${}^tA$ è iniettiva perché non ha variabili libere, allora i vettori ${}^tA \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e ${}^tA \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (perché $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lo sono). Dunque i due vettori seguenti

$${}^tA \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = {}^tA \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$${}^tA \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = {}^tA \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti ed appartengono all'immagine di ${}^tA \cdot A$.

Da quanto visto fin qui:

- $\dim(\ker({}^tA \cdot A)) \geq 1$
- $\dim(\mathrm{Im}({}^tA \cdot A)) \geq 2$.

Ma $\dim(\ker({}^tA \cdot A)) + \dim(\mathrm{Im}({}^tA \cdot A)) =$ numero di colonne di ${}^tA \cdot A$, cioe' 3.

Quindi $\dim(\ker({}^tA \cdot A)) = 1$ e $\dim(\mathrm{Im}({}^tA \cdot A)) = 2$. Possiamo concludere che $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base di $\ker({}^tA \cdot A)$ e che $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base di $\mathrm{Im}({}^tA \cdot A)$

Esercizio 3. [10pt.] Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

1. Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot (2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \cdot (-1-\lambda) - 2 \cdot 4 \cdot (-1-\lambda) \cdot (-1-\lambda) =$$

$$= (\lambda^2 - 2\lambda - 8)(-1-\lambda)^2$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 2)(\lambda + 1)^2$$

Abbiamo quindi gli autovalori:

$\lambda_1 = 4$	con molteplicità algebrica	1
$\lambda_2 = -2$	—— " ——	1
$\lambda_3 = -1$	—— " ——	2

2. L'autospazio relativo a $\lambda_1 = 4$ è

$$E_1 = \ker(A - \lambda_1 I) = \ker\begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

È chiaro che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$ inoltre la molteplicità algebrica di λ_1 è 1, quindi la dimensione di E_1 — la molteplicità geometrica, è necessariamente 1. Di conseguenza

$$E_1 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

L'autospazio relativo a $\lambda_2 = -2$ è

$$E_2 = \ker(A - \lambda_2 I) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedendo come prima osserviamo che $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2$, quindi

$$E_2 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

L'autospazio relativo a $\lambda_3 = -1$ è

$$E_3 = \ker(A - \lambda_3 I) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per mosse di Gauß otteniamo

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{-2\,I}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
+\tfrac{4}{5}\,II
$$

$$
\begin{array}{cccc} P & P & L & L \end{array}
$$

Assegnando alle variabili libere x_3 e x_4 i valori $x_3=1$, $x_4=0$ e $x_3=0$, $x_4=1$ rispettivamente si ottiene

$$
E_3 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}
$$

3. Affinché una matrice quadrata 4×4 sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ è necessario che la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori sia 4, e che ciascuna di queste coincida con la rispettiva molteplicità geometrica — ossia con la dimensione dell'autospazio relativo al corrispondente autovalore.

Nella fattispecie abbiamo

Autovalore	M. algebrica	M. geometrica
$\lambda_1 = 4$	1	$1 = \dim E_1$
$\lambda_2 = -2$	1	$1 = \dim E_2$
$\lambda_3 = -2$	2	$2 = \dim E_3$

Quindi la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. **[6 pt.]**

1. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa la seguente proprietà:
$$\ker(f) = \mathrm{Imm}(f) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

2. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa la seguente proprietà:
$$\ker(f) = \mathrm{Imm}(f) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

3. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa la seguente proprietà:
$$\ker(f) = \mathrm{Imm}(f) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

1. Indichiamo con $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$. La condizione
$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\{v_1\}$$
impone che $f v_1 = \alpha v_1$ e $f v_2 = \beta v_2$ per opportuni numeri reali α e β non entrambi nulli. Siccome
$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Span}\{v_1\}$$
abbiamo $\alpha = 0$.

Considerando, per esempio, la scelta $\beta = 1$ otteniamo
$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{ossia} \quad [f]^{can}_{can} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Una facile verifica mostra che questa funzione soddisfa la condizione richiesta.

2. Procedendo come al punto precedente scriviamo $v_1 = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Quindi $f v_1 = \alpha v_1$ e $f v_2 = \beta v_1$ per la condizione sull'immagine e $\alpha = 0$ per la condizione sul nucleo. Ponendo $\beta = 1$ troviamo la funzione determinata da

$$f\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

Detta $\mathcal{B}$ la base $\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ abbiamo

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad \underline{[f]^{can}_{can}} = \begin{pmatrix}-2&1\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}-2&1\\3&0\end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix}0&1/3\\1&2/3\end{pmatrix}} = \underline{\begin{pmatrix}-2&-4/3\\3&2\end{pmatrix}}$$

Nuovamente, è facile verificare che la richiesta è soddisfatta da questa funzione.

3. Una funzione $f: \square \to \mathbb{R}^3$ soddisfa

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = 3$$

La richiesta impone, però

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim\left(\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = 1$$

E queste equazioni si contraddicono. Quindi <u>NON c'è</u> alcuna funzione con la proprietà richiesta.