Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 11 Settembre 2023

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [7 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$z^3 - 64 = 0.$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = 3 - z.$$

Esercizio 2. **[8 pt.]** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare dove

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

1. Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica e dimostrare che A è invertibile.

2. La matrice B associata a $f \circ f \circ f \circ f$ rispetto alla base canonica è una matrice invertibile? (Motivare bene la risposta).[1]

3. Trovare la matrice C associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

[1] $f \circ f \circ f \circ f$ è l'applicazione lineare ottenuta componendo f con se stessa quattro volte. Per la risoluzione di questa domanda non è necessario il calcolo esplicito di B.

Esercizio 3. [10pt.] Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Esercizio 4. [7 pt.]

1. Trovare tutte le matrici 2×2 che sono associate (rispetto alla base canonica) ad applicazioni lineari $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che $\ker(T) = \mathrm{Im}(T) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
Nel contesto dei numeri complessi, dimostrare che A è una matrice diagonalizzabile. (Motivare bene la risposta).