Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 12 Settembre 2022

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione:

$$z^2 - \overline{z} = 0$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione:

$$e^z + 1 = 0$$

Esercizio 2. [8 pt.]

Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dove

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ -2x_2 - 8x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

1. Trovare una base del nucleo di T.
2. Trovare una base dell'immagine di T.
3. Determinare l'insieme:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3. [10pt.]
Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Esercizio 4 [punti 6]

1. Esistono matrici 3×3 con la prima colonna di zeri e tali che $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sia autovettore di autovalore $\lambda = -1$?

   [In caso di risposta positiva, mostrare un esempio; altrimenti motivare la risposta negativa.]

2. Trovare una matrice A di dimensioni 3×3 (scritta rispetto alla base canonica) che soddisfi le seguenti proprietà:

   - $\lambda = -2$ è autovalore.
   - $det(A) = 0$.
   - A è *non* è diagonalizzabile.