Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 18 Luglio 2022

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 pt.]

Trovare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione:

$$64z^3 + 27 = 0$$

$64z^3 = -27$. In coordinate polari:

$z = (\rho, \theta) \Rightarrow 64z^3 = (64\rho^3, 3\theta)$

$-27 = (27, \pi)$

Dunque $64\rho^3 = 27$ e $3\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow$

$\rho = \frac{3}{4}$ e $\theta = \pi/3 + 2k\pi/3 = \pi/3, \pi, \frac{5}{3}\pi, \ldots$ poi si ripetono

$z_1 = \left(\frac{3}{4}, \pi/3\right) = \frac{3}{4}\left(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3\right) = \frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} i$

$z_2 = \left(\frac{3}{4}, \pi\right) = -\frac{3}{4}$

$z_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{3}\pi\right) = \frac{3}{4}\left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi\right) = \frac{3}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} i$

Esercizio 2. [8 pt.]

1. Trovare una base del sottospazio vettoriale
$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}.$$

2. Trovare una base del sottospazio intersezione $V \cap W$ dove V è il sottospazio di sopra, e
$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

3. Trovare la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dove
$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

1.

$V = \ker f$ dove $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ e' l'appl. lineare

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4$. La matrice associata e'

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ P \quad L \quad L \quad L \end{array}$$

x_2, x_3, x_4 sono variabili libere.

Le soluzioni speciali sono:

$x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$: $2x_1 + 1 - 0 + 0 = 0$, $x_1 = -1/2$

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$: $2x_1 + 0 - 1 + 0 = 0$, $x_1 = 1/2$

$$\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0 \qquad \qquad \qquad \qquad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$x_3 = 0 \quad 2x_1 + 0 - 0 + 1 = 0$$
$$x_4 = 1 \qquad x_1 = -\frac{1}{2}$$

Una base di $V = \ker f$ è $\mathcal{B} = \{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3 \}$

2.

Notiamo che $V \cap W$ è l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ che sono soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{I}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} - 2\mathrm{I}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

x_3 e x_4 sono le variabili libere

$$x_3 = 1 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \Rightarrow -x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$
$$x_4 = 0$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$
$x_4 = 1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 - 3 - 0 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ -x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \Rightarrow -x_2 + 0 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base di $V \cap W$ è $\mathcal{B} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$

3. Osserviamo che $\ker T = V \cap W$

e quindi ha dimensione 2.

Esercizio 3. [10pt.]
Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e stabilire se la matrice A è diagonalizzabile. [Motivare la risposta!]
2. Determinare gli autovalori reali della matrice B e stabilire se la matrice B è diagonalizzabile. [Motivare la risposta!]
3. Per ognuno degli autovalori di A, determinare una base del relativo autospazio.

(1) Il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(-3-\lambda)+1\right] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2$$

$\lambda = 1$ m.a. 1

$\lambda = -2$ m.a. 2

$$Aut_A(-2) = \ker(A+2I) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Riduco:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - II} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} P & P & L \end{array}$$

C'è una sola variabile libera, quindi

$\dim Aut_A(2) = \dim(\ker(A+2I)) = 1$, cioè

$\lambda = -2$ ha molteplicità geometrica $1 \neq$ molt. algebrica che è 2

Quindi A <u>NON</u> è diagonalizzabile

2. Il polinomio caratteristico di B:

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-3-\lambda)+4\right] =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1-\lambda = 0, \text{ cioè } \lambda = -1$$

oppure $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \iff \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ $\nearrow -2$, $\searrow 1$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$.

Tutti gli autovalori sono reali e sono tutti con molt. alg. $= 1$. Quindi anche le molt. geom. sono $= 1$ e la matrice B è diagonalizzabile.

3. Abbiamo già calcolato gli autovalori di A.

$\underline{\lambda = 1}$ $\quad Aut_A(1) = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Scambio } I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III - 2I]{II + 2I} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III + II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} L & \; P & \; P \end{matrix} \end{array}$$

La variabile libera è x_1

$$x_1 = 1 \quad \begin{cases} x_2 - 4x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 - 0 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \\ -9x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathcal{B} = \{\vec{w}\}$ è una base di $Aut_A(1)$

$\underline{\lambda = -2}$ $\quad$ Abbiamo già visto che la matrice $A + 2I$

si riduce a $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & \; P & \; L \end{matrix} \end{array}$. La variabile libera è x_3.

$$x_3 = 1 \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & \Rightarrow 3x_1 + 2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathcal{B} = \{\vec{u}\}$ è una base di $Aut_A(-2)$.

Esercizio 4 [punti 6]

1. Determinare una matrice 3×3 che ha il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ come autovettore di autovalore $\lambda = 2$.

2. Esiste una matrice A di dimensioni 3×3 (scritta rispetto alla base canonica) che soddisfi le seguenti tre proprietà?
   - $\lambda = 2$ è autovalore.
   - A non è invertibile.
   - A è diagonalizzabile.

   Se la risposta è NO, spiegare perché. Se la risposta è SI, trovare un esempio.

1/ Se $A = \left(w_1 \middle| w_2 \middle| w_3 \right)$ allora $A \cdot v = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1 + w_2$

Basta imporre che $A \cdot v = w_1 + w_2 = 2 \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ad esempio, se $w_1 = w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e w_3 qualunque, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ha la proprietà richiesta.

2/ A non invertibile $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ è autovalore.

Visto che anche $\lambda = 2$ è autovalore, di sicuro A è diagonalizzabile se ha anche autovalore $\lambda \neq 0, 2$.

Scansionato con CamScanner

Ad esempio se A e' una matrice con autovalori $\lambda=0$, $\lambda=2$, $\lambda=1$, certamente A ha le proprieta' richieste.

L'esempio piu' semplice e' $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.