GEOMETRIA 19/7/2021

Esercizio 1 $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ k \end{pmatrix}$

La dimensione del sottospazio $W = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ e' uguale alla dimensione dell'immagine della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

che ha i vettori v_1, v_2, v_3 come sue colonne. (Piu' precisamente, W e' l'immagine dell'appl. lineare associata ad A)

Quindi $\dim(W) =$ numero di colonne pivot di A.

Con la riduzione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}+\frac{1}{2}\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

Quindi se $k-2 \neq 0$, cioe' se $k \neq 2$, avremo 3 pivot e percio' $\dim W = 3$; se invece $k-2=0$, cioe' $k=2$, avremo 2 pivot e la terza colonna libera, e percio' $\dim W = 2$.

Esercizio 2

1. Il polinomio caratteristico e'

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

sviluppo lungo la II colonna

$$= (4-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 4\right] = (4-\lambda)(\cancel{4} + \lambda^2 - 4\lambda - \cancel{4}) =$$

$$(4-\lambda) \cdot \lambda \cdot (\lambda - 4) = -\lambda(\lambda-4)^2$$

2. Gli autovalori di A sono:

$\lambda = 0$ con m.a. 1

$\lambda = 4$ con m.a. 2

3. • $\lambda = 0$

$$Aut_A(0) = \operatorname{Ker}(A - 0 \cdot I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + \frac{1}{2}I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} P & P & L \end{array} \end{array}$$

x_3 variabile libera

$$x_3 = 1 \quad \begin{cases} 2x_1 \quad -4x_3 = 0 & \rightarrow 2x_1 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \\ \quad 4x_2 \quad = 0 & \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soluzione speciale.

$\mathcal{B}_1 = \{ \vec{s}_1 \}$ base di $Aut_A(0)$ e quindi $\lambda = 0$ ha m.g. $= 1$

- $\lambda = 4$

$$Aut_A(4) = Ker(A - 4 \cdot I) = ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - \frac{1}{2}I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} P & L & L \end{array} \end{array}$$

x_2 e x_3 variabili libere

$x_2 = 1$, $x_3 = 0$ $\quad \{ -2x_1 - 4x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0$, $x_3 = 1$ $\quad \{ -2x_1 - 4x_3 = 0 \Rightarrow -2x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_2 = \{ \vec{s}_2, \vec{s}_3 \}$ e' una base di $Aut_A(4)$, e quindi $\lambda = 4$ ha m.g. 2.

$$\mathcal{B} = \{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e' una base di autovettori, quindi A e' diagonalizzabile