Geometria — Compito scritto del 25 Gennaio 2021

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 pt.] Consideriamo l'insieme

$$W \;=\; \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 0\}.$$

1. Dimostrare che W è un sottospazio.
2. Trovare una base di W.

Esercizio 2. [14 pt.] Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Scrivere il polinomio caratteristico di A, e determinare gli autovalori reali e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Esercizio 3. [8 pt] OK. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione:

$$e^{3\cdot\overline{z}} + i \;=\; 0$$

Esercizio 4.***

1. Trovare una matrice 2×2 *non diagonalizzabile* che ha $\lambda = 2$ come autovalore.
2. Dimostrare che se un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è tale che $f \circ f = id$ è l'identità, allora gli unici possibili autovalori sono $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$.

Soluzioni

Esercizio 1

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \right\}$$

① W sottospazio.

soddisfa le due proprietà richieste, cioè:

(a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} \in W \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_1' \\ x_2+x_2' \\ x_3+x_3' \\ x_4+x_4' \end{pmatrix} \in W.$

Infatti $2(x_1+x_1') + 3(x_3+x_3') - 4(x_4+x_4') =$

$$\underbrace{(2x_1 + 3x_2 - 4x_4)}_{=0 \text{ perché } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W} + \underbrace{(2x_1' + 3x_3' - 4x_4')}_{=0 \text{ perché } \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} \in W} = 0 + 0$$

(b) $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \end{pmatrix} \in W.$

Infatti $2(\lambda x_1) + 3(\lambda x_3) - 4(\lambda x_4) =$

$\lambda(2x_1 + 3x_3 - 4x_4) = \lambda \cdot 0 = 0$

② Base di W.

Notiamo che $W = \ker f$ dove $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ è l'applicazione lineare t.c. $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2x_1 + 3x_3 - 4x_4$.

La matrice associata è $A = \begin{array}{cccc} (2 & 0 & 3 & -4) \\ P & L & L & L \end{array}$.

Le variabili libere sono x_2, x_3, x_4.

Le soluzioni speciali sono le seguenti:

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x_1 + 3\cdot 0 - 4\cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x_1 + 3\cdot 1 - 4\cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} \quad \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x_1 + 3\cdot 0 - 4\cdot 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad \vec{S}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni speciali

$B = \{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3 \}$ formano una base di $\ker f = W$.

Esercizio 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) Il polinomio caratteristico è

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -6 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \text{(sviluppo lungo la I riga)}$$

$$= (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -6 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \text{(sviluppo lungo la II riga)}$$

$$= (-1-\lambda)(-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 3 \\ -6 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 \left[(6-\lambda)(-3-\lambda)+18 \right]$$

$$= (\lambda+1)^2 (-\cancel{18} - 6\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + \cancel{18}) = (\lambda+1)^2(\lambda^2-3\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2(\lambda-3)$$

$\lambda = 0$ m.a. 1 ; $\lambda = -1$ m.a. 2 ; $\lambda = 3$ m.a. 1

$\underline{\lambda = 0}$ $\quad Aut_A(0) = \ker(A - 0 \cdot I) = \ker A$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}+3\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} -x_1 = 0 \\ 6x_2 + 3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -\tfrac{1}{2} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è autovettore di autovalore } \lambda = 0$$

e $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1\}$ è una base di $Aut_A(0)$

$\underline{\lambda = -1}$ $\quad Aut_A(-1) = \ker(A + 1 \cdot I)$

$$A + 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \longleftrightarrow IV]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - \frac{3}{2} I}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 16 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Venabili libere x_3 e x_4.

$$x_3 = 1,\ x_4 = 0 \quad \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 16x_2 + 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0,\ x_4 = 1 \quad \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 6 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{8} \\ 16x_2 + 6 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{8} \end{cases} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1/8 \\ -3/8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è una base di $Aut_A(-1)$

$\underline{\lambda = 3}$ $\quad Aut_A(3) = \ker(A - 3I)$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV + \frac{1}{2} I]{II + \frac{3}{4} I} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + 2II}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

x_4 variabile libera

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} -4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 3x_2 + 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \\ -4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \qquad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_4\}$ è una base di $Aut_A(3)$

(3) $\mathcal{B} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \}$ è una base di autovettori di $\mathbb{R}$

quindi se

$$S = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cccc} \lambda=0 & \lambda=-1 & \lambda=-1 & \lambda=3 \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/8 & 0 \\ -1/2 & 0 & -3/8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice "cambio di base", abbiamo che

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ è la matrice diagonale

avente sulla diagonale gli autovalori corrispondenti.

Esercizio 3

$$e^{3\cdot\bar{z}} + i = 0 \iff e^{3\cdot\bar{z}} = -i$$

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

$$e^{3\cdot\bar{z}} = e^{3a-3ib} = e^{3a}(\cos 3b - i \sin 3b)$$

è il numero complesso di coordinate polari $(e^{3a}, -3b)$

$-i$ è il numero complesso di coordinate polari $(1, -\pi/2)$

Quindi $e^{3\cdot\bar{z}} = -i \iff (e^{3a}, -3b) = (1, -\pi/2)$

$$\iff \begin{cases} e^{3a} = 1 \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ -3b = -\pi/2 + 2k\pi \Rightarrow b = \pi/6 - 2k\pi/3 \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Ci sono infinite soluzioni:

$$S = \left\{ \left(\pi/6 + 2k\tfrac{\pi}{3}\right) i \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} =$$

$$= \Big\{ \underset{h=0}{\tfrac{\pi}{6} i}, \underset{h=1}{\tfrac{5}{6}\pi i}, \underset{h=2}{\tfrac{3}{2}\pi i}, \dots$$

$$\underset{h=-1}{-\tfrac{\pi}{2} i}, \underset{h=-2}{-\tfrac{7}{6}\pi i}, \dots \Big\}$$

Esercizio 4

(1) Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Abbiamo una matrice che ha $\lambda = 2$ come unico autovalore di molteplicità 2.

Infatti $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$

Inoltre $\lambda = 2$ ha m.g. $1 < 2$.

Infatti $\mathrm{Aut}_A(2) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha dimensione 1.

E' facile vedere che $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base di $\mathrm{Aut}_A(2)$.

(2) Sia λ un autovalore di A, e sia $\vec{v} \neq 0$ un suo autovettore.

Allora $(A \cdot A)\vec{v} = A \cdot (A \cdot \vec{v}) = A \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \cdot (A \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\lambda \vec{v}) =$
$= \lambda^2 \cdot \vec{v}$.

D'altra parte $(A \cdot A)\vec{v} = I \cdot \vec{v} = \vec{v}$ e quindi

$\lambda^2 \vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ o $\lambda = -1$.