Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 27 Gennaio 2019

Tempo a disposizione: 120 minuti.

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Cognome) |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Nome) |_|_|_|_|_|_| (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]
Considerare l'equazione complessa:

$$z^2 - 4i\bar{z} = 0.$$

Determinare quante sono le soluzioni, e descrivere l'insieme S di tutte le soluzioni.

Dobbiamo risolvere $z^2 = 4i\bar{z}$.

In coordinate polari, sia $z = (\rho, \theta)$

Allora $z^2 = (\rho^2, 2\theta)$.

Inoltre $4i = (4, \pi/2)$ e $\bar{z} = (\rho, -\theta)$ e

quindi $4i\bar{z} = (4\rho, \pi/2 - \theta)$

Dobbiamo risolvere $(\rho^2, 2\theta) = (4\rho, \pi/2 - \theta)$,

cioe' $\begin{cases} \rho^2 = 4\rho & \Rightarrow \rho(\rho-4) = 0 \Rightarrow \rho = 0, 4 \\ 2\theta = \pi/2 - \theta + 2k\pi & \Rightarrow 3\theta = \pi/2 + 2k\pi \Rightarrow \theta = \pi/6 + \frac{2\pi}{3}k \end{cases}$

Quando $\rho = 0$ si ha la solutione $z_0 = 0$, Quando $\rho = 4$ si hanno 3 soluzioni per

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad , \qquad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi \quad , \qquad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi$$

$(k=0)$ $\qquad$ $(k=1)$ $\qquad$ $(k=2)$

(poi le soluzioni si ripetono)

che in coordinate cartesiane si scrivono

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$$

$$z_2 = 4\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

$$z_3 = 4\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -4i$$

$$S = \left\{ 0, \ 2\sqrt{3}+2i, \ -2\sqrt{3}+2i, \ -4i \right\}$$

contiene 4 soluzioni.

Esercizio 2. [8 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y - 3z \\ -x + y + z - t \\ -2x + 4y - z - 2t \end{pmatrix}.$$

1. Scrivere la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
2. Trovare la dimensione e una base del nucleo e dell'immagine di T.
3. Trovare l'insieme $\mathcal{S}_1$ di tutte le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x & & & & = 1 \\ & 2y & - 3z & & = 1 \\ -x & + y & + z & - t & = 1 \\ -2x & + 4y & - z & - 2t & = 1 \end{cases}$$

4. Trovare l'insieme $\mathcal{S}_2$ di tutte le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x & & & & = 1 \\ & 2y & - 3z & & = 1 \\ -x & + y & + z & - t & = 0 \\ -2x & + 4y & - z & - 2t & = 1 \end{cases}$$

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Riduco, considerando termini noti generici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & b_2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & b_3 \\ -2 & 4 & -1 & -2 & b_4 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}+2\mathrm{I}]{\mathrm{III}+\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & b_3+b_1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & b_4+2b_1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{IV}-2\mathrm{II}]{\mathrm{III}-\frac{1}{2}\mathrm{II}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & b_3+b_1-\frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & b_4+2b_1-2b_2 \end{array}\right) \xrightarrow{IV-2III} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & b_3+b_1-\frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-2b_3-b_2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array} \end{array}$$

C'è una variabile libera t. Quindi il nucleo di T (cioè lo spazio nullo di A) ha dimensione 1.
La soluzione speciale si ottiene ponendo $t = 1$ nel sistema ridotto OMOGENEO (dove $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$)

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y - 3z = 0 \\ \frac{5}{2}z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}z = 1 \Rightarrow z = \frac{2}{5}$$

Dunque $2y = 3z = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}$ e $x = 0$

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione speciale e $\mathcal{B} = \{\vec{S}\}$ è una base di $\ker T$.

L'immagine ha dimensione 3 ed ha per base i 3 vettori relativi alle colonne pivot della matrice iniziale A, cioè

$\operatorname{Im} T$ ha come base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

3. Se $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$, $b_4 = 1$ il sistema ridotto diventa quello corrispondente alla matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5/2 & -1 & 1+1-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2-1 \end{array}\right)$$

E' evidente dall'ultima riga che in questo caso il sistema NON ha soluzioni: $S = \emptyset$

4. Se $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$, $b_4 = 1$ il sistema ridotto diventa quello corrispondente alla matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5/2 & -1 & 0+1-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-0-1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y - 3z = 1 \\ \frac{5}{2}z - t = \frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Trovo una soluzione particolare ponendo la variabile libera $t = 0$

$$\frac{5}{2}z = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{5}$$

$$2y - 3\cdot\frac{1}{5} = 1 \Rightarrow 2y = \frac{8}{5} \Rightarrow y = \frac{4}{5}$$

$$x = 1$$

$$\vec{S}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'insieme di tutte le soluzioni è l'insieme:

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{S}_p + \vec{v} \;\middle|\; \vec{v} \in N(A) \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo:

$$g(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \;;\quad g(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \;;\quad g(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \;;\quad g(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ sono i vettori della base canonica.

1. Determinare la matrice A associata a g.
2. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.
3. Per ciascun autovalore, determinare la molteplicità geometrica e una base del relativo autospazio.
4. Trovare, se esiste, una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS = D$ è una matrice diagonale.

1) $$A = \left(g(e_1) \,\middle|\, g(e_2) \,\middle|\, g(e_3) \,\middle|\, g(e_4) \right) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{sviluppo lungo} \\ \text{la II riga}\end{array}\right) = (-2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -4 & -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c}\text{sviluppo lungo} \\ \text{la II riga}\end{array}\right)$$

$$= (-2-\lambda)(-2-\lambda) \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 2 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)^2 \left[(-4-\lambda)(2-\lambda) + 8 \right]$$

$$= (\lambda+2)^2 (\lambda^2 + 2\lambda) = \lambda(\lambda+2)^3$$

$\lambda = 0$ autovalore di molt. algebrica 1.

$\lambda = -2$ autovalore di molt. algebrica 3.

3) Autovalore $\lambda = 0$

Autospazio: $N(A - 0 \cdot I) = N(A)$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - I} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + 2II}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

La variabile libera e' x_4.

Per trovare la soluzione speciale, pongo $x_4 = 1$ nel sistema ridotto

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & \Rightarrow -4x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ -2x_2 = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \\ -2x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi l'autospazio $Aut_A(0) = N(A)$ ha dimensione 1 ed ha come base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, l'insieme che contiene l'unica soluzione speciale.

Autovalore $\lambda = -2$

Autospazio: $N(A + 2I)$

$$A+2I = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-2I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Visto che ci sono 3 variabili libere, cioè x_2, x_3, x_4,

$N(A+2I) = \mathrm{Aut}_A(2)$ ha dimensione 3, cioè la

molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = -2$ è 3.

(uguale alla molteplicità algebrica)

Troviamo una base.

$x_2 = 1$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x_1 + 4 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 1$
$x_4 = 0$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x_1 - 2 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 1$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x_1 + 2 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$\vec{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque una base dell'autospazio $Aut_A(-2)$ e'

$$B = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4)

$$\left\{ \underset{\lambda=0}{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=-2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=-2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=-2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$ e' una base di

autovettori, quindi se consideriamo la matrice "cambio di base"

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, abbiamo che

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ e' diagonale

Esercizio 4. [8pt.]

1. Trovare una base del sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y \text{ e } z = t\}$.

2. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare non iniettiva avente $v = (1, 1, 0)$ come autovettore di autovalore $\lambda = 1$.

   (a) Trovare un esempio di una tale g che è diagonalizzabile, e scriverne poi la matrice associata rispetto alla base canonica.

   (b) Trovare un esempio di una tale g che *non* è diagonalizzabile, e scriverne poi la matrice associata rispetto alla base canonica.

1) Notiamo che V e' il nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dove $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ z-t \end{pmatrix}$,

la cui matrice associata e'

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & \;L & \;P & \;L \end{matrix} \end{array}.$$

A e' già ridotta ed ha y e t come variabili libere. Troviamo le 2 soluzioni speciali.

$\vec{S}_1$ $\quad y = 0,\ t = 1 \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ z = 1 \end{matrix} \qquad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{S}_2$ $\quad y = 1,\ t = 0 \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ z = 0 \end{matrix} \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi $V = \operatorname{Ker} f = N(A)$ ha come base $\mathcal{B} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}$

2.) Visto che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 1$

sappiamo che $$g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) g è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ ha una base di autovettori.

Aggiungo 2 vettori a v in modo da ottenere una base, ad esempio

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

v_1 è autovettore. Basta allora definire g in modo che anche v_2 e v_3 siano autovettori. Il modo più semplice è imporre che

$$g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, in modo che

g NON è iniettiva perché $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker g$, e

sia v_2 che v_3 siano autovettori di autovalore $\lambda = 0$.

Avendo definito g sui vettori di una base, g è univocamente determinata.

Notiamo che $g(e_1) = g(v_1 - v_2) = g(v_1) - g(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Inoltre $g(e_2) = g(v_2) = 0$ e $g(e_3) = g(v_3) = 0$.

Quindi la matrice associata a g rispetto alla base canonica e'

$$A = \left(g(e_1) \middle| g(e_2) \middle| g(e_3) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Non c'e' un unico modo per risolvere questo esercizio. Una possibilita' e' questa.

Considero, come prima, la base $\mathcal{B} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

Pongo $g(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e poi $g(v_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Visto che $v_2 \in \ker g$, g NON e' iniettiva.

$$g(e_1) = g(v_1 - v_2) = g(v_1) - g(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g(e_2) = g(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad g(e_3) = g(v_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

La matrice associata rispetto alla base canonica e' quindi

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico e'

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & a \\ 1 & -\lambda & b \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{sviluppo lungo la II colonna}}{=} (-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & c-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda)(c-\lambda) \Rightarrow \text{gli autovalori}$$

sono $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = c$. Un modo per avere la

NON diagonalizzabilita' e' porre $c = 0$,

in modo che $\lambda = 0$ sia autovalore di molt. algebrica 2,

ed avere $\dim(N(A - 0 \cdot I)) = \dim(N(A)) = 1$,

in modo che la molt. geometrica di $\lambda = 0$ sia $1 < 2$.

Con $c = 0$, deve quindi avere che

A ha solo una variabile libera. Riduciamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} P & L & P \end{array}$$

Abbiamo 1 variabile libera e 2 colonne pivot

non appena $b - a \neq 0$, cioe' quando $a \neq b$.

Ad esempio, basta porre $a = 1$ e $b = 0$.

Concludendo, ponendo $a = 1, b = 0, c = 0$,

la matrice che si ottiene, cioe'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha le proprieta' richieste, cioe' $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' autovettore

di autovalore $\lambda = 1$, e A <u>NON</u> e' diagonalizzabile

perche' ha $\lambda = 0$ come autovalore di molteplicita'

algebrica 2 e molteplicita' geometrica

$\dim(N(A - 0 \cdot I)) = \dim(N(A)) = 1 < 2$.