GEOMETRIA - Esercitazione scritta
15/12/2019

Determinare il valore di verità delle seguenti affermazioni:

1) L'equazione complessa $e^{3z+4} = w$ ha sempre soluzione z per ogni w.

2) Tutte le applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^{17} \to \mathbb{R}^{17}$ iniettive sono anche suriettive.

3) L'insieme di tutti gli autovettori di una matrice quadrata e' un sottospazio vettoriale.

4) Se v_1 e v_2 sono autovettori relativi allo stesso autovalore λ, allora anche $v_1 + 3v_2$ e' un autovettore di autovalore λ.

5) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1 - 2x_2 = x_3 + 2 \right\}$ e' un sottospazio vettoriale

6) Se V e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ allora $V + W = \{ v + w \mid v \in V, w \in W \}$ e' sottospazio.

7) Se una matrice ha tutti autovalori reali allora e' diagonalizzabile

8) Se $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ e' un'appl. lineare allora $\dim(\mathrm{Im} f) \leq 7$

9) Se $f: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ e' un'appl. lineare allora $\dim(\mathrm{Ker} f) \geq 3$

10) Per ogni matrice quadrata A, il prodotto $A^T \cdot A$ e' una matrice simmetrica

11) Se A quadrata non e' invertibile, allora $\lambda = 0$ e' un suo autovalore.

12) Se λ_1 e' autovalore di A e λ_2 e' autovalore di B, allora $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ e' autovalore di $A \cdot B$.

ESERCIZI

1) Trovare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione: $9e^{2z} - e^{4\bar{z}} = 0$

2) Trovare una applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker f = \operatorname{Im} f$

3) L'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha come matrice associata $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Trovare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.

4) Determinare se la seguente matrice A e' diagonalizzabile, e in caso positivo trovare una matrice S t.c. $S^{-1}AS$ e' diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Trovare una base $\mathcal{B}$ del sottospazio

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

6) Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

nel campo complesso

7) Dimostrare che A e' invertibile se e solo se A^T e' invertibile.

SOLUZIONI DOMANDE

1) Per ogni $w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$ esistono infiniti $t \in \mathbb{C}$ tali che $e^t = w$.
Infatti, se $w = a + ib$, tutti i numeri complessi $t = \lg \rho + (\theta + 2k\pi)i$ dove $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ e' il modulo di w e $\theta = \operatorname{arctg} b/a$ e' l'argomento di w sono tali che $e^t = w$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
Di conseguenza, ponendo $t = 3z+4$, si ricava che esistono infiniti numeri complessi $z = \frac{1}{3}(t-4)$ tali che $e^{3z+4} = w$.

<u>ATTENZIONE</u> Se $w = 0$, l'equazione $e^t = w$ <u>NON</u> ha soluzioni complesse t, e quindi e^{3z+4} <u>NON</u> ha soluzioni complesse z.

2) Vero. Infatti un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ da uno spazio in se stesso e' iniettiva $\Leftrightarrow$ e' suriettiva $\Leftrightarrow$ e' biunivoca.

3) Falso. Infatti se v_1 è un autovettore di autovalore λ_1 e v_2 è un autovettore di autovalore λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $v_1 + v_2$ <u>NON</u> è necessariamente un autovettore.

Ad esempio, sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Allora $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 1$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 2$, ma $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>NON</u> è autovettore perché

$A \cdot (v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ <u>NON</u> è multiplo di $v_1 + v_2$.

4) Vero. Infatti se $A \cdot v_1 = \lambda v_1$ e $A \cdot v_2 = \lambda \cdot v_2$ allora $A(v_1 + 3v_2) = A \cdot v_1 + 3 \cdot Av_2 = \lambda v_1 + 3\lambda v_2 =$

$= \lambda(v_1 + 3v_2)$. Ricordare che l'insieme di tutti gli autovettori relativi ad un fissato autovalore λ, cui si aggiunge il vettore nullo, formano un sottospazio, cioè l'autospazio di λ, che è uguale allo spazio nullo $N(A - \lambda I)$.

5) Falso. Basta notare che il vettore nullo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$, mentre il vettore nullo appartiene ad ogni sottospazio.

6) Vero. Infatti siano $u_1, u_2 \in V + W$. Allora esistono $v_1, v_2 \in V$ e $w_1, w_2 \in W$ tali che $u_1 = v_1 + w_1$ e $u_2 = v_2 + w_2$, e si ha che $u_1 + u_2 = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \in V + W$, visto che $v_1 + v_2 \in V$ e $w_1 + w_2 \in W$ per le proprieta' di sottospazio di V e di W. Inoltre, se $u = v + w \in V + W$ dove $v \in V$, $w \in W$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda u = \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w \in V + W$, visto che $\lambda v \in V$ e $\lambda w \in W$ per le proprieta' di sottospazio di V e W.

7) Falso. Ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha come unico autovalore $\lambda = 1$ con molteplicita' algebrica 2, ma il relativo autospazio $N(A - 1 \cdot I)$, cioe'

lo spazio nullo di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ha dimensione 1.
Quindi la molteplicita' geometrica 1 e' minore della molteplicita' algebrica 2, e non e' possibile trovare una base di autovettori.

8) Vero. Infatti l'immagine di f e' un sottospazio di $\mathbb{R}^7$.

9) Vero. Infatti se A e' la matrice associata ad f, A ha dimensioni 4×7. Una tale matrice ha necessariamente almeno 3 variabili libere, quindi almeno 3 soluzioni speciali, e quindi $N(A) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}\{$solut. speciali$\}$ ha almeno dimensione 3.

10) Vero. Infatti se $B = A^T A$ si ha che $B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$

11) Vero. Infatti A non invertibile quadrata $\Leftrightarrow$ A ha almeno una variabile libera $\Leftrightarrow$

$N(A) \neq \{0\} \Leftrightarrow \exists v \neq 0$ con $A \cdot v = 0$

e quindi $\lambda = 0$ e' autovalore.

12) Falso. Ad esempio se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e se $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, e' facile verificare che

A ha come unico autovalore $\lambda_1 = 1$, B ha

come unico autovalore $\lambda_2 = 1$, ma

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ha

autovalori $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ perche' il suo

polinomio caratteristico e' $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$(2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$.

SOLUZIONI ESERCIZI

1) $9e^{2z} = e^{4\bar{z}}$

Sia $z = a + ib$. Allora

$$9e^{2z} = 9e^{(2a+2bi)} = 9e^{2a}(\cos 2b + i\sin 2b)$$

e $$e^{4\bar{z}} = e^{4a-4bi} = e^{4a}(\cos 4b - i\sin 4b)$$

Il primo numero ha modulo $\rho_1 = 9e^{2a}$ ed argomento $\theta_1 = 2b$; il secondo numero ha modulo $\rho_2 = e^{4a}$ e modulo $\theta_2 = -4b$. Quindi

$$\begin{cases} 9e^{2a} = e^{4a} \Rightarrow 9 = e^{2a} \Rightarrow 2a = \lg 9 = 2\lg 3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow a = \lg 3 \\ 2b = -4b + 2k\pi \Rightarrow 6b = 2k\pi \Rightarrow b = k\pi/3 \end{cases}$$

Quindi le soluzioni z sono tutti e soli gli infiniti numeri complessi della forma

$z = \lg 3 + ik\pi/3$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

Ad esempio:

$\lg 3$, $\lg 3 + i\pi/3$, $\lg 3 + i2\pi/3$, ecc.

2) Per individuare un'appl. lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ basta assegnarne i valori sui vettori della base canonica $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Se poniamo $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

allora f ha la proprietà richiesta.

3) Se A è la matrice associata a T rispetto alla base canonica, e $S = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

è la matrice "cambio di base", allora

$B = S^{-1} A S$, e quindi $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$

Calcoliamo S^{-1} con il metodo di Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II - \frac{2}{3} I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & -2/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III + \frac{3}{2} II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & -2/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II - \frac{1}{3} III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & -1/3 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I + \frac{1}{2} III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & -2/3 & 0 & -1/3 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I + \frac{3}{2} II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & -1/3 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II}/(-2/3)]{\text{I}/(-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -3/4 & -1/2 \end{array}\right)$$

$\text{III}/(-2)$

Quindi $$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -16 & 22 & -8 \\ -12 & 18 & -4 \\ -2 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11/2 & -2 \\ -3 & 9/2 & -1 \\ -1/2 & 9/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4) Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \text{sviluppo lungo la IV riga}$$

$$= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \text{(sviluppo lungo la I riga)}$$

$$= (1-\lambda) \left[-\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= (1-\lambda) \left[-\lambda \cdot \left(-\lambda(-2-\lambda) - 1 \right) + 2 \left(1 - 0 \right) \right] =$$

$$= (1-\lambda) \left[-\lambda \left(2\lambda + \lambda^2 - 1 \right) + 2 \right] =$$

$$= (1-\lambda) \left(-2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + 2 \right) = (\lambda - 1)(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2)$$

Scomponiamo $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = \lambda(\lambda^2 - 1) + 2(\lambda^2 - 1) =$

$$= (\lambda + 2)(\lambda^2 - 1) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Quindi il polinomio caratteristico:

$$P_\lambda(A) = (1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2)$$

$\lambda = 1$ autovalore di molteplicità algebrica 2

$\lambda = -1$ " " " 1

$\lambda = -2$ " " " 1.

$\underline{\lambda = 1}$ Determiniamo l'autospazio $N(A - 1 \cdot I)$.

$$A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III - II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Sistema ridotto:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Variabili libere x_3 e x_4. Troviamo le soluzioni speciali:

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$: $-x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $-x_2 + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$, $x_4 = 1$: $-x_1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $-x_2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$$\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori $\vec{s}_1$ ed $\vec{s}_2$ formano una base dell'autospazio dell'autovalore $\lambda = 1$

$\underline{\lambda = -1}$

$$A + 1\,I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III - II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[III\ e\ IV]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & P \end{matrix} \end{array}$$

Sistema ridotto
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Variabile libera $x_3 = 1$

$$x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$$
$$x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$
$$2x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

La soluzione speciale e' $s_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ed e' una base dell'autospazio di autovalore $\lambda = -1$

$\lambda = -2$

$$A - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - \frac{1}{2} I} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III - \frac{1}{2} II} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \text{ e } IV]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & P \end{array} \end{array}$$

Sistema ridotto
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Variabile libera $x_3 = 1$

$$2x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$
$$2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$
$$3x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

La soluzione speciale e' $\vec{s}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ed e' una base dell'autospazio dell'autovalore $\lambda = -2$

Una base di autovettori è la seguente

$$\mathcal{B} = \{ \underbrace{\vec{s}_1 , \vec{s}_2}_{\substack{\text{autovalore} \\ \lambda = 1}}, \underbrace{\vec{s}_3}_{\substack{\text{autovalore} \\ \lambda = -1}}, \underbrace{\vec{s}_4}_{\substack{\text{autovalore} \\ \lambda = -2}} \}$$

Se $S = \left(\vec{s}_1 \middle| \vec{s}_2 \middle| \vec{s}_3 \middle| \vec{s}_4 \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

allora la matrice

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

è diagonale.

5) Notiamo che $V = \ker f$ dove

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ è l'applicazione lineare

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4$$

La matrice associata ad f e' la matrice 1×4

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Le variabili libere sono x_2, x_3, x_4

Troviamo le soluzioni speciali.

$x_2 = 1$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$

$$3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow$$

$$3x_1 + 4 - 0 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -4/3$$

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 1$
$x_4 = 0$

$$3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow$$

$$3x_1 + 0 - 3 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 1$

$$3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow 3x_1 + 0 + 0 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1/3$$

$$\vec{S}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque una base di $V = \ker f$ e' data delle soluzioni speciali, cioe'

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6) Troviamo il polinomio caratteristico:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4$$

Nel campo complesso, gli autovalori sono le radici di $\lambda^2 + 4 = 0$, cioe' $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$

$\underline{\lambda = 2i}$

L'autospazio e' lo spazio nullo di $A - 2i \cdot I$

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2i I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} P & L \end{array} \end{array}$$

La variabile libera $x_2 = 1$

$$-2i\, x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow -2i\, x_1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2i} = \frac{1}{2} i \qquad \vec{S}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -2i}$

L'autospazio e' lo spazio nullo di $A+2i\,I$

$$\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{II+2i\,I} \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \quad P & L \end{matrix}$$

La variabile libera $x_2 = 1$

$$2i\,x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$2i\,x_1 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$$

$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base di autovettori e' $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Se $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e' la matrice "cambio di base"

abbiamo che

$$S^{-1} A\, S = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \text{ e' diagonale.}$$

7) Supponiamo prima che A^T sia invertibile e sia $B = (A^T)^{-1}$. Verifichiamo che $A^{-1} = B^T$:

$$A \cdot B^T = (A^T)^T \cdot B^T = (B \cdot A^T)^T = I^T = I \quad e$$

$$B^T \cdot A = B^T \cdot (A^T)^T = (A^T \cdot B)^T = I^T = I.$$

Viceversa, supponiamo che A sia invertibile. Verifichiamo che $B = (A^{-1})^T$ e' l'inversa di A^T:

$$B \cdot A^T = (A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I \quad e$$

$$A^T \cdot B = A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I$$