Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

09 Gennaio 2015 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione, e scriverle sia in forma polare che in forma cartesiana:

$$z^5 - 16\,\overline{z} = 0.$$

Esercizio 2. **[9 pt.]**
Al variare del parametro k, sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$T_k(x, y, z) = (kx, -x + y + 3z, x + 2y - 2z)$$

1. Determinare la matrice A_k associata a T_k.
2. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare T_k è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
3. Determinare una base per l'immagine e una base per il nucleo di T_k quando $k = 0$ e quando $k = 1$.

Esercizio 3. [11 pt.]
Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k & 0 \\ k+2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & k \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
3. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k non è invertibile.
4. Quando $k = 0$, trovare una matrice invertibile S tale che $S^{-1} A_k S$ è una matrice diagonale.

Esercizio 4. [6pt.]
Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti due proprietà:

1. $\mathrm{Imm}(f) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,
2. f è diagonalizzabile ed ha come autovalori $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$,

e determinarne la matrice A rispetto alla base canonica.