Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

27 Giugno 2016 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.[8pt.] Determinare l'insieme S di tutte le soluzioni complesse z del seguente sistema:

$$\begin{cases} (\overline{z} - i)^2 = z\,(2iz - 4) \\ z^5 - 9z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. [10pt.] Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T\left(x, y, z\right) = \left(x + 3y - 2z, 2x + 2y, -x - z\right).$$

(2a). Si determini la dimensione e una base dell'immagine di T.

(2b). Si determini la dimensione e una base del nucleo di T.

(2c). Si determini per quali valori di k esistono vettori (x, y, z) tali che $T(x, y, z) = (3, 1, k)$.

(2d). Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Determinare la dimensione e una base del sottospazio $W = \mathrm{Im}(T) \cap V$

Esercizio 3. **[10pt.]** Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(3a). Determinare gli autovalori di A_k.

(3b). Determinare l'insieme $\text{Diag} = \{k \in \mathbb{R} \mid A_k \text{ è diagonalizzabile}\}$.

(3c). Per ogni $k \in \text{Diag}$, determinare una matrice diagonale D_k ed una matrice invertibile B_k tali che $B_k^{-1} A_k B_k = D_k$.

Esercizio 4. [6pt.] Trovare un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che abbia le seguenti proprietà:

1. I suoi autovalori sono $\lambda = 2$ e $\lambda = -3$;
2. I vettori $v_1 = (1, -2)$, $v_2 = (-3, 5)$ sono autovettori.