Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

16 Febbraio 2106 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.

(a) Determinare l'insieme S_1 di tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^2 \;=\; -\,2\cdot\overline{z}$$

(b) Determinare l'insieme S_2 di tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$e^{z-1} - e^{2\overline{z}} \;=\; 0$$

SOLUZIONE:

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema lineare in 3 equazioni e 4 incognite:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = b_1 \\ 8x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 9x_4 = b_2 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_4 = b_3 \end{cases}$$

(a) Si determini la matrice A corrispondente al sistema omogeneo associato.

(b) Si determini la dimensione e una base dello spazio delle colonne di A.

(c) Si determini la dimensione e una base dello spazio nullo (nucleo) di A.

(d) Trovare l'insieme di tutte le soluzioni (x_1, x_2, x_3) del sistema di sopra dove i termini noti sono $b_1 = 9, b_2 = 18, b_3 = 0$.

SOLUZIONE:

Esercizio 3. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f_k(x_1, x_2, x_3,) = (2x_1, (1-k)x_1 + kx_2 - x_3, (k-1)x_1 + (k+1)x_3) .$$

(a) Si scriva la matrice A_k associata a f_k rispetto alla base canonica.

(b) Determinare gli autovalori di A_k.

(c) Determinare per quali k la matrice A_k è diagonalizzabile.

(d) Ponendo $k = 2$ trovare una matrice diagonale D e una matrice invertibile S tale che $S^{-1}A_2S = D$.

SOLUZIONE:

Esercizio 4. Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, -5, 0, 0);\ v_2 = (2, 0, 3, 3);\ v_3 = (0, 0, 0, -4);\ v_4 = (2, 0, 1, 1).$$

(a) Verificare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

(b) Scegliendo un opportuno n, trovare un'applicazione lineare suriettiva $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^n$ il cui nucleo coincide con $\mathrm{Span}(\{v_1, v_2\})$.

SOLUZIONE: