

ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI
Dispensa 6

Mauro Di Nasso

Ultimo aggiornamento: May 12, 2024

Classi, rimpiazzamento, ricorsione transfinita

1. Classi in ZFC

Abbiamo già incontrato almeno tre diverse “collezioni” che è contraddittorio assumere come insiemi:

- *Paradosso di Russell*: La collezione $R = \{x \mid x \notin x\}$ di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi, non è un insieme.
- *Paradosso di Cantor*: La collezione universale $V = \{x \mid x = x\}$ di tutti gli insiemi non è un insieme.
- *Paradosso di Burali-Forti*: La collezione $\text{ORD} = \{x \mid x \text{ è un ordinale}\}$ di tutti gli ordinali non è un insieme.

Strettamente parlando, le collezioni di sopra non esistono nella nostra teoria assiomatica, perchè gli unici oggetti della teoria sono insiemi. Ciò nonostante nella pratica matematica si usano talvolta collezioni che non sono insiemi; in particolare, la collezione degli ordinali ha una speciale importanza. Come possiamo rimediare a questo inconveniente?

Una prima possibile strada è quella di mantenerci all'interno della teoria di Zermelo-Fraenkel, e considerare le classi come convenienti notazioni metalinguistiche, cioè come notazioni che si riferiscono ad oggetti che *non* fanno parte della teoria. Vedremo più avanti che un'altra possibile strada è quella di lavorare all'interno di una *teoria assiomatica delle classi*.

DEFINIZIONE 1.1 (Meta-definizione in ZFC). Una *classe* \mathbf{C} è l'estensione di una formula $\varphi(x)$, eventualmente con parametri; cioè, \mathbf{C} è la collezione di tutti gli insiemi x che soddisfano $\varphi(x)$. In questo caso, con abuso di notazione, scriviamo:

$$\mathbf{C} = \{x \mid \varphi(x)\}.$$

Riserveremo lettere in grassetto per indicare classi in ZFC.

Ovviamente ogni insieme A è una classe, perchè banalmente $A = \mathbf{C}_\varphi$ dove $\varphi(x)$ è la formula con parametro “ $x \in A$ ”.

Osserviamo che le tre collezioni elencate sopra relative ai paradossi sono tutte di questo tipo. Se \mathbf{C}_φ è la classe estensione della formula φ , allora useremo le seguenti notazioni:

- “ $a \in \mathbf{C}_\varphi$ ” indica la formula “ $\varphi(a)$ ”;
- “ $a \in \mathbf{C}_\varphi \cap \mathbf{C}_\psi$ ” indica la formula “ $\varphi(a) \wedge \psi(a)$ ”;
- “ $a \in \mathbf{C}_\varphi \cup \mathbf{C}_\psi$ ” indica la formula “ $\varphi(a) \vee \psi(a)$ ”;
- “ $a \in \mathbf{C}_\varphi \setminus \mathbf{C}_\psi$ ” indica la formula “ $\varphi(a) \wedge \neg\psi(a)$ ”;
- “ $\mathbf{C}_\varphi \subseteq \mathbf{C}_\psi$ ” indica la formula “ $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ ”;

Ricordiamo comunque che in generale non possiamo applicare a tali collezioni le operazioni insiemistiche, perchè le classi *non sempre* sono insiemi.

2. Assioma di Rimpiazzamento

DEFINIZIONE 2.1. La formula $\varphi(x, y, z_1, \dots, z_k)$ si dice *formula funzionale* rispetto alle variabili x e y se vale:

$$\forall x \forall y \forall y' (\varphi(x, y, z_1, \dots, z_k) \wedge \varphi(x, y', z_1, \dots, z_k)) \rightarrow y = y'.$$

DEFINIZIONE 2.2. Se una classe di coppie ordinate

$$\mathbf{F} = \{(x, y, z_1, \dots, z_k) \mid \varphi(x, y, z_1, \dots, z_k)\}$$

è definita da una formula funzionale $\varphi(x, y, z_1, \dots, z_k)$ in x e y , allora \mathbf{F} si dice *funzione-classe*. Il *dominio* e l'*immagine* di \mathbf{F} sono rispettivamente le classi:

- $\text{dom}(\mathbf{F}) := \{x \mid \exists y \varphi(x, y, z_1, \dots, z_k)\},$
- $\text{imm}(\mathbf{F}) := \{y \mid \exists x \varphi(x, y, z_1, \dots, z_k)\}.$

Come per le usuali funzioni, si adotta la notazione $\mathbf{F} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ per intendere che \mathbf{F} è una funzione-classe con $\text{dom}(\mathbf{F}) = \mathbf{A}$ e $\text{imm}(\mathbf{F}) \subseteq \mathbf{B}$. Inoltre, se $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}$ è una sottoclasse del dominio, denotiamo con $\mathbf{F}[\mathbf{C}] = \{\mathbf{F}(x) \mid x \in \mathbf{C}\}$ l'immagine di \mathbf{C} mediante \mathbf{F} .

Assioma 9: Schema di Rimpiazzamento.

Per ogni formula $\varphi(x, y, z_1, \dots, z_k)$, il seguente è un assioma:

$$\begin{aligned} \forall A_1 \dots \forall A_k \text{ “}\varphi(x, y, A_1, \dots, A_k) \text{ funzionale in } x \text{ e } y\text{”} \rightarrow \\ \forall B \exists C \text{ “}C = \{y \mid \exists x \in B \varphi(x, y, A_1, \dots, A_k)\}\text{”}. \end{aligned}$$

Usando le notazioni introdotte per le classi, possiamo informalmente enunciare l'assioma di rimpiazzamento in questo modo:

- **Rimpiazzamento:** Se \mathbf{F} è una funzione-classe e A è un insieme allora anche $\mathbf{F}[A]$ è un insieme.

Applicando l'assioma di rimpiazzamento, possiamo finalmente concludere la dimostrazione del Teorema ??.

DIM. TEOREMA ?? (PARTE 2). Ricordiamo che restava da dimostrare l'esistenza dell'insieme

$$Y = \{\alpha \text{ ordinale} \mid \alpha \text{ è isomorfo ad un segmento iniziale proprio di } A\}.$$

Consideriamo la seguente formula (con parametro A):

$$\varphi(a, \alpha) : \text{ “}a \in A \text{ e l'ordinale } \alpha \text{ è isomorfo al segmento iniziale } A_a\text{”}.$$

La formula φ è funzionale nella variabile a perchè per ogni $a \in A$ esiste al più un ordinale $\alpha \cong A_a$. Ricordiamo che avevamo considerato l'insieme

$$X = \{a \in A \mid A_a \text{ è isomorfo ad un ordinale}\},$$

che esiste per l'assioma di *separazione*. Grazie all'assioma di *rimpiazzamento*, esiste allora l'insieme $\{\alpha \mid \exists x \in X \varphi(x, \alpha)\}$, che è precisamente l'insieme Y di cui volevamo dimostrare l'esistenza. □

La nozione di restrizione si applica anche alle funzioni-classe nel modo ovvio.

DEFINIZIONE 2.3. Sia \mathbf{F} una funzione-classe. Per ogni classe $\mathbf{A} \subseteq \text{dom}(\mathbf{F})$, la *restrizione* $\mathbf{F}|_{\mathbf{A}}$ è la funzione-classe tale che $\text{dom}(\mathbf{F}|_{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}$ e $(\mathbf{F}|_{\mathbf{A}})(x) = \mathbf{F}(x)$ per ogni $x \in \mathbf{A}$. Più precisamente, se \mathbf{F} è determinata dalla formula funzionale $\varphi(x, y)$ e se $\mathbf{A} = \{z \mid \psi(z)\}$, allora $\mathbf{F}|_{\mathbf{A}} = \{(x, y) \mid \psi(x) \wedge \varphi(x, y)\}$.

Un'utile caratterizzazione dell'assioma di *rimpiazzamento* è la seguente:

TEOREMA 2.4 (Meta-teorema di ZFC). *Lo schema di rimpiazzamento è equivalente alla seguente proprietà: Se \mathbf{F} è una funzione-classe e $A \subseteq \text{dom}(\mathbf{F})$ è un insieme, allora la restrizione $\mathbf{F}|_A$ è un insieme (ed è una funzione).*

DIM. Sia $\varphi(x, y)$ la formula funzionale che definisce \mathbf{F} . Dallo schema di rimpiazzamento segue che l'immagine $\mathbf{F}[A] = \{y \mid \exists a \in A \varphi(a, y)\}$ è un insieme. Ma allora anche la restrizione $\mathbf{F}|_A = \{(x, y) \in A \times \mathbf{F}[A] \mid \varphi(x, y)\}$ è un insieme per l'assioma di *separazione*. Viceversa, data una funzione-classe \mathbf{F} ed un insieme A , se la restrizione $f = \mathbf{F}|_A$ è un insieme, allora anche la sua immagine $\text{imm}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} = \{\mathbf{F}(a) \mid a \in A\} = \mathbf{F}[A]$ è un insieme. \square

3. La teoria delle classi NGB di von Neumann-Gödel-Bernays

Un secondo modo per trattare collezioni di insiemi (che possono non essere esse stesse insiemi) è quello di formalizzarlo all'interno di una teoria assiomatica. Si tratta di estendere il concetto di *insieme* in modo che anche le collezioni di insiemi viste sopra siano effettivi oggetti della nostra teoria. A questo scopo, formuleremo qui un'opportuna teoria assiomatica, la *teoria delle classi* NGB di von Neumann-Gödel-Bernays. Come vedremo, questa teoria “ingloba” la teoria ZFC, ed ha il vantaggio di semplificare notevolmente alcuni argomenti più avanzati, e specialmente la ricorsione transfinita.

Gli oggetti della teoria NGB si chiamano *classi*. Come vedremo, alcune di quelle classi si dicono *insiemi*. Quelle classi che non sono insiemi si dicono *classi proprie*.

L'idea intuitiva è che le classi proprie siano talmente “grandi” che possano essere considerate solo come oggetti “in potenza” e non come entità pienamente realizzate; per questo sembra plausibile assumere che una classe propria non possa mai essere un elemento di un'altra classe. Viceversa, l'intuizione degli insiemi è che siano classi non troppo “grandi”, che quindi possiamo pensare come oggetti realizzati, conclusi, e che per questo possano essere elementi di altre classi. Per gli insiemi, cioè per le classi “piccole”, assumeremo tutti gli assiomi della teoria degli insiemi ZFC che abbiamo visto fin qui; ad essi aggiungeremo tre ulteriori assiomi che riguardano le classi in generale. Come fatto per ZFC, procederemo con cautela, permettendo tra le classi solo operazioni che non conducano direttamente a contraddizioni.

È importante far presente che nella nostra teoria NGB esisteranno come oggetti anche le collezioni “grandi” che abbiamo considerato nei paradossi di Russell, di Cantor, e di Burali-Forti, ricordati sopra. Ad esempio, la collezione

$$R := \{x \text{ insieme} \mid x \notin x\}$$

sarà una classe, quindi un legittimo oggetto della teoria NGB. Il paradosso di Russell ci dice che R non può essere un insieme; si tratta quindi di una classe propria che non può appartenere ad alcuna classe; in particolare, $R \notin R$. Notiamo che questo

non determina una contraddizione perché R non è un insieme, e quindi da $R \notin R$ non possiamo dedurre che $R \in R$.

Anche la collezione universale $V = \{x \text{ insieme} \mid x = x\}$ di tutti gli insiemi, e la collezione ORD di tutti gli ordinali, saranno classi nella teoria NGB. I paradossi di Cantor e di Burali-Forti dimostrano semplicemente che V e ORD *non* sono insiemi, e quindi sono classi proprie.

Diamo di seguito la definizioni formali relative alle teoria NGB di von Neumann-Gödel-Bernays (ricordiamo che gli oggetti di questa teoria si chiamano *classi*). Cominciamo specificando il linguaggio.

- Le formule della teoria NGB sono le stesse formule del linguaggio della teoria degli insiemi considerate per la teoria ZFC.¹

DEFINIZIONE 3.1. Una classe A si dice *insieme* se esiste una classe B tale che $A \in B$. Una classe che non è un insieme si dice *classe propria*.

Le seguenti sono comode abbreviazioni che useremo nel seguito.

NOTAZIONE 3.2.

- Scriviamo “ x è un insieme” per intendere la formula “ $\exists y x \in y$ ”.
- Scriviamo “ $\forall^I x \varphi(x)$ ” per intendere “ $\forall x (“x \text{ insieme}” \rightarrow \varphi(x))$ ”, cioè:

$$“\forall x (\exists y x \in y) \rightarrow \varphi(x)”.$$

- Scriviamo “ $\exists^I x \varphi(x)$ ” per intendere “ $\exists x (“x \text{ insieme}” \wedge \varphi(x))$ ”, cioè:

$$“\exists x (\exists y x \in y) \wedge \varphi(x)”.$$

Nelle formule di sopra, come y possiamo considerare una qualunque variabile purché *non* compaia nella formula φ .

Di solito, ma non sempre, con lettere maiuscole A, B, C, \dots denoteremo generiche classi, e con lettere minuscole a, b, c, \dots denoteremo insiemi. Analogamente, useremo lettere maiuscole $X, Y, Z \dots$ per indicare variabili che sono classi, e lettere minuscole x, y, z, \dots per indicare variabili che sono insiemi.²

Elenchiamo finalmente gli assiomi di NGB. Come prima proprietà che riguarda le classi, estendiamo la validità del fondamentale principio di estensionalità.

NGB 1: Estensionalità per classi.

Due classi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi:

$$\forall A \forall B ((\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)) \leftrightarrow A = B).$$

Ricordiamo il principio di *comprensione*, già introdotto nel primo capitolo quando abbiamo trattato la teoria “ingenua” degli insiemi.

Principio di Comprensione (o di Astrazione). Se P è una proprietà “ammissibile”, allora esiste la sua estensione, cioè una “collezione” X tale che:

$$X = \{x \mid P(x)\}.$$

¹ Vedi Definizione ??.

² In alcuni testi, le lettere minuscole denotano esclusivamente insiemi. Ad esempio, scrivendo “ $\forall x \varphi(x)$ ” intendono “ $\forall^I x \varphi(x)$ ”; mentre la quantificazione universale (non ristretta agli insiemi) viene scritta nella forma “ $\forall X \varphi(X)$ ”, dove per la variabile quantificata si usa una lettera maiuscola.

Come ci hanno mostrato i paradossi, quel principio è contraddittorio se per proprietà “ammissibili” intendiamo quelle formalizzate da formule nel linguaggio della teoria degli insiemi, e se per “collezioni” intendiamo gli insiemi della teoria ZFC. Tuttavia il principio di comprensione è molto utile, ed infatti abbiamo incluso una sua versione più debole tra gli assiomi di ZFC, cioè l’assioma di *separazione*. Ricordiamo che quell’assioma postula l’esistenza dell’estensione di ogni proprietà, purché ci si restringa ai soli oggetti che appartengono ad un insieme prefissato.

Anche nella teoria delle classi NGB c’è un’assioma che postula il principio di comprensione in una forma limitata, dove le proprietà “ammissibili” sono quelle formalizzabili da formule in cui i quantificatori variano solo su insiemi. Grazie a questo assioma, tutte le classi di ZFC (che erano informalmente definite come collezioni ottenute come estensioni di formule) saranno oggetti della teoria NGB. L’intuizione è che però l’universo di NGB sia più ricco, e contenga come oggetti anche collezioni “non definibili” di insiemi, cioè collezioni che non sono estensione di alcuna formula.

DEFINIZIONE 3.3. Una formula φ si dice *predicativa* se tutti i suoi quantificatori sono ristretti ad insiemi, cioè compaiono sempre nella forma “ $\forall^{\mathcal{I}}x \dots$ ” oppure “ $\exists^{\mathcal{I}}x \dots$ ”.

NGB 2: Comprensione (o Astrazione).

Se $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ una formula *predicativa* dove x, x_1, \dots, x_n sono tutte e sole le variabili libere, allora il seguente è un assioma:

$$\forall A_1, \dots, A_n \exists C \forall x (x \in C \leftrightarrow (“x \text{ è un insieme}” \wedge \varphi(x, A_1, \dots, A_n))).$$

Denoteremo la classe C di sopra nel modo seguente:

$$C = \{x \text{ insieme} \mid \varphi(x, A_1, \dots, A_n)\}.$$

ESERCIZIO 3.4. Dimostrare che se A, B sono classi, allora anche le seguenti sono classi:

- (1) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
- (2) $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
- (3) $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.
- (4) $A \times B := \{x \mid \exists a \in A \exists b \in B x = (a, b)\}$.
- (5) $\bigcup A := \{x \mid \exists y \in A x \in y\}$.
- (6) $\mathcal{P}(A) := \{x \text{ insieme} \mid x \subseteq A\}$.
- (7) $\text{dom}(A) := \{x \text{ insieme} \mid \exists y (x, y) \in A\}$.
- (8) $\text{imm}(A) := \{y \text{ insieme} \mid \exists x (x, y) \in A\}$.

ESERCIZIO 3.5.

- (1) La relazione di identità tra insiemi è una classe propria:³

$$\Delta := \{(x, x) \mid x \text{ insieme}\}.$$

³ Abbiamo usato la consueta notazione funzionale, per intendere

$$\Delta := \{t \mid \exists x t = (x, x)\} \quad \text{e} \quad E := \{t \mid \exists x \exists y x \in y \wedge t = (x, y)\}.$$

(2) La relazione di appartenenza tra insiemi è una classe propria:

$$E := \{(x, y) \mid x, y \text{ insiemi} \wedge x \in y\}.$$

L'assioma di rimpiazzamento per classi ha un enunciato più semplice.

NGB 3: Rimpiazzamento.

Se F è una funzione e $a \subseteq \text{dom}(F)$ è un insieme, allora anche l'immagine $F[a] := \{F(x) \mid x \in a\}$ è un insieme:

$$\forall F \forall^{\mathcal{I}} a \text{ ("} F \text{ funzione" } \rightarrow (\exists^{\mathcal{I}} b \text{ "} b = F[a]\text{"})).$$

Vogliamo che la nostra teoria delle classi incorpori la teoria degli insiemi ZFC, in modo che tutte le classi di ZFC siano effettivi oggetti della teoria.

Quest'ultima proprietà è di immediata verifica. Infatti sia $\mathbf{C} = \{x \mid \varphi(x)\}$ la classe di ZFC definita come estensione della formula $\varphi(x)$. Per l'assioma di comprensione, esiste in NGB la classe $C = \{x \mid \varphi^{\mathcal{I}}(x)\}$, dove con $\varphi^{\mathcal{I}}$ abbiamo denotato la formula ottenuta da φ restringendo tutti i quantificatori agli insiemi.⁴ Chiaramente C coincide con la collezione \mathbf{C} .

Per "inglobare" in NGB la teoria ZFC, dobbiamo postulare la validità di tutte le formule corrispondenti ad assiomi di ZFC, nella forma ristretta ad insiemi. Ad esempio, abbiamo visto sopra che se A è una classe anche $\bigcup A$ è una classe; ma se vogliamo mantenere la validità dell'assioma dell'unione per insiemi, dobbiamo postulare che se la classe A è un insieme, allora anche la classe $\bigcup A$ è un insieme.

NGB 4: Assiomi di ZFC ristretti ad insiemi.

- *Insieme vuoto*: $\exists^{\mathcal{I}} x \forall y y \notin x$.
- *Coppia*: $\forall^{\mathcal{I}} x \forall^{\mathcal{I}} y \exists^{\mathcal{I}} z \text{ "} z = \{x, y\}\text{"}$.
- *Unione*: $\forall^{\mathcal{I}} x \exists^{\mathcal{I}} y \text{ "} y = \bigcup x\text{"}$.
- *Insieme potenza*: $\forall^{\mathcal{I}} x \exists^{\mathcal{I}} y \text{ "} y = \mathcal{P}(x)\text{"}$.
- *Infinito*: $\exists^{\mathcal{I}} x \text{ "} x \text{ induttivo}\text{"}$.
- *Scelta*: $\forall^{\mathcal{I}} \mathcal{F} \exists^{\mathcal{I}} f \text{ ("} f \text{ funzione" } \wedge \forall F \in \mathcal{F} (F \neq \emptyset \rightarrow f(F) \in \mathcal{F}))$.

Le abbreviazioni usate sopra sono le stesse usate nei capitoli precedenti; ad esempio:⁵

- " $z = \{x, y\}$ " denota la formula " $\forall t (t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$ ".
- " $y = \bigcup x$ " denota la formula " $\forall t (t \in y \leftrightarrow (\exists z (z \in x \wedge t \in z)))$ ".
- " $y = \mathcal{P}(x)$ " denota la formula " $\forall t (t \in y \leftrightarrow (\forall z (z \in t \rightarrow z \in x)))$ ".

Qualche commento sul gruppo di assiomi NGB 4:

- In conseguenza dell'assioma di comprensione NGB 2 esiste la classe senza elementi $\{x \text{ insieme} \mid x \neq x\}$. Tale classe è unica, visto l'assioma di estensionalità NGB 1. Visto l'assioma dell'insieme vuoto in NGB 4, quella classe senza elementi è un insieme, che denotiamo " \emptyset ".

⁴ Cioè, dove tutti i quantificatori vengono posti nella forma $\forall x (x \text{ "insieme" } \rightarrow \dots)$ o $\exists x (x \text{ "insieme" } \wedge \dots)$.

⁵ Notiamo che in queste tre formule (usate all'interno di assiomi in NGB 4) non c'è bisogno di restringere i quantificatori $\forall t, \exists z, \forall z$ agli insiemi, perché per ipotesi sia x che y sono insiemi.

- L'assioma della coppia di ZFC vale nella forma ristretta ad insiemi, come postulata in NGB 4. Tuttavia quell'assioma *non* vale nella forma generale non ristretta. Infatti, se almeno una tra le classi A e B è una classe propria allora *non* esiste la classe coppia $C := \{A, B\}$, visto che le classi proprie *non* appartengono ad alcuna classe.
- L'assioma dell'unione vale anche nella versione non ristretta; infatti, se A è una classe, grazie al principio di comprensione esiste la classe $\bigcup A = \{x \mid \exists y \in A \ x \in y\}$.
- Applicando il principio di comprensione, per ogni classe A si dimostra che esiste la classe $\mathcal{P}(A) = \{x \text{ insieme} \mid x \subseteq A\}$. Notiamo che se A è un insieme, allora la classe $\mathcal{P}(A)$ è un insieme, in base all'assioma delle parti incluso in NGB 4. Tuttavia non vale la versione non ristretta di quella proprietà; infatti, se A è una classe propria, allora *non* esiste la classe che contiene tutte le sottoclassi di A , perchè una classe non può contenere classi proprie.
- L'assioma di comprensione NGB 2 garantisce l'esistenza della classe di tutti gli insiemi induttivi. Tuttavia solo l'assioma dell'infinito in NGB 4 garantisce che quella classe non è vuota.

Notiamo che non è stato necessario includere in NGB 4 la lista completa degli assiomi di ZFC, perchè quelli mancanti sono conseguenza degli altri assiomi di NGB. Infatti, la restrizione dell'estensionalità ad insiemi è conseguenza diretta di NGB 1; inoltre – come vedremo qui di seguito – sia lo schema di separazione, sia lo schema di rimpiazzamento di ZFC sono dimostrabili nella teoria NGB.

TEOREMA 3.6 (NGB). *Vale la*

- Proprietà dell'intersezione.

Se C è una classe e b è un insieme, allora anche $C \cap b$ è un insieme:

$$\forall C \forall^{\mathcal{I}} b \exists^{\mathcal{I}} a \forall x (x \in a \leftrightarrow (x \in C \wedge x \in b))$$

DIM. Se non esistono insiemi $x \in C$ tali che $x \in b$, allora la classe $C \cap b$ è l'insieme vuoto. Altrimenti possiamo prendere un elemento $\star \in C$ tale che $\star \in b$, e definire la funzione $F : V \rightarrow V$ ponendo

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in C \\ \star & \text{se } x \notin C. \end{cases}$$

Per il rimpiazzamento, l'immagine $F[b] = \{F(x) \mid x \in b\}$ è un insieme. È poi immediato verificare che $F[b] = C \cap b$, e quindi $C \cap b$ è un insieme. \square

Da NGB segue lo schema di rimpiazzamento di ZFC.

TEOREMA 3.7 (NGB). *Vale lo schema di rimpiazzamento di ZFC.*

DIM. Sia $\varphi(x, y)$ una formula funzionale. Per l'assioma di comprensione, esiste in NGB la funzione $F = \{(x, y) \mid \varphi(x, y)\}$. Se A è un insieme, dal rimpiazzamento in NGB segue che anche $F[A] = \{F(x) \mid x \in A\} = \{y \mid \exists x \in A \ \varphi(x, y)\}$ è un insieme. \square

Si può dimostrare (ma non lo facciamo qui perché servirebbero strumenti che non abbiamo) che gli assiomi di coppia, di unione, e di potenza ristretti ad insiemi, *non* sono dimostrabili a partire dagli assiomi per classi NGB 1, NGB 3, e NGB 4.

Ricalcando quanto già visto in ZFC, gli assiomi dati permettono di dimostrare che la classe degli insiemi è chiusa rispetto alle fondamentali operazioni.

ESERCIZIO 3.8.

- (1) Se R è un insieme, allora anche $\text{dom}(R)$ e $\text{imm}(R)$ sono insiemi;
- (2) Se A, B sono insiemi, allora anche $A \times B$ è un insieme;
- (3) Se una classe f è una funzione dove $\text{dom}(f)$ è un insieme, allora f è un insieme.

ESERCIZIO 3.9. Dimostrare che non esistono funzioni iniettive $F : C \rightarrow b$ tra una classe propria C e un insieme b .

ESERCIZIO 3.10. Dimostrare che per ogni insieme $a \neq \emptyset$, la sua classe di equipotenza $|a| := \{b \text{ insieme} \mid |b| = |a|\}$ è una classe propria (cioè esiste come classe, ma non è un insieme).

Alcuni autori includono tra gli assiomi della teoria di von Neumann-Gödel-Bernays anche il seguente:

- **Scelta globale:** *Esiste una funzione $F : V \rightarrow V$ definita sulla classe V di tutti gli insiemi tale che $F(x) \in x$ per ogni x insieme non vuoto x .*

Quella forte forma di scelta non è necessaria ai nostri scopi, e quindi non l'abbiamo inserita.

Una caratteristica importante della teoria delle classi NGB, dimostrata da Gödel, è il fatto che si tratta di una teoria *finitamente assiomatizzabile*. Questo significa che si può trovare una lista finita di assiomi (che Gödel ha fornito esplicitamente) che sono equivalenti a quelli di NGB.

4. La ricorsione transfinita

Ricordiamo che un tipico procedimento per definire successioni (cioè funzioni con dominio \mathbb{N}) è la ricorsione numerabile. Tale proprietà garantisce l'esistenza ed unicità di una successione, una volta che sia stabilito in modo "definibile" quale deve essere il suo valore in un numero qualunque, se assumiamo come noti i suoi valori sui numeri più piccoli. Un esempio tipico è la funzione fattoriale $n \mapsto n!$ che è definita come l'unica successione $f : \omega \rightarrow \omega$ tale che $f(0) = 1$ e $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$.

Nell'ambito della teoria degli insiemi, è utile avere a disposizione uno strumento analogo che più in generale permetta di definire funzioni definite su ordinali, o anche funzioni-classe definite sull'intera classe ORD degli ordinali. La formulazione dei teoremi di "ricorsione transfinita" è più semplice all'interno della teoria delle classi NGB; vedremo comunque in seguito come formulare correttamente quei teoremi anche nel linguaggio della teoria degli insiemi ZFC. In entrambi i casi, l'assioma di rimpiazzamento giocherà un ruolo cruciale.

TEOREMA 4.1 (NGB – Ricorsione transfinita su un ordinale).

Sia $G : V \rightarrow V$ una funzione definita per tutti gli insiemi. Allora per ogni ordinale α esiste ed unica funzione f con dominio α e tale che per ogni $\gamma \in \alpha$ si ha:

$$(\star) \quad f(\gamma) = G(f|_\gamma).$$

Notiamo che la funzione f la cui esistenza è garantita dal teorema di ricorsione transfinita è un insieme, visto che il suo dominio è un insieme.⁶

DIM. Per ogni ordinale $\beta \in \alpha$, chiamiamo β -*approssimazione* una funzione f_β avente come dominio $\text{dom}(f_\beta) = \beta + 1$, e che soddisfa le proprietà (\star) per ogni $\gamma \in \text{dom}(f_\beta)$. Procediamo per induzione transfinita e mostriamo che per ogni $\beta \in \alpha$, esiste ed unica una β -approssimazione f_β .

Se $\beta = 0$, allora $f_0 = \{(0, G(\emptyset))\}$ è una 0-approssimazione, ed è banalmente unica. Notiamo infatti che $\text{dom}(f_0) = 1 = \{0\}$ e che la restrizione $(f_0)|_0 = \emptyset$ è la funzione vuota.

Se $\beta = \gamma + 1$ è successore, prendiamo la γ -approssimazione f_γ che esiste ed è unica per ipotesi induttiva, ed estendiamo imponendo che il valore in β sia quello imposto dalla condizione (\star) . Precisamente, definiamo $f_\beta := f_\gamma \cup \{(\gamma + 1, G(f_\gamma))\}$. Chiaramente $\text{dom}(f_\beta) = \text{dom}(f_\gamma) \cup \{\gamma + 1\} = (\gamma + 1) \cup \{\gamma + 1\} = \beta + 1$; inoltre segue direttamente dalla definizione che f_β soddisfa la proprietà (\star) , ed è quindi una β -approssimazione. Inoltre, se f e g sono due β -approssimazioni, allora le loro restrizioni $f|_\beta$ e $g|_\beta$ coincidono perchè sono due γ -approssimazioni, e le γ -approssimazioni sono uniche per ipotesi induttiva. Inoltre, anche $f(\beta) = G(f|_\beta) = G(g|_\beta) = g(\beta)$. Possiamo concludere che $f = g$, come volevamo.

Nel caso $\beta = \lambda$ limite, consideriamo la funzione (classe) F che associa ad ogni ordinale $\gamma < \lambda$ l'unica γ -approssimazione f_γ . Per l'assioma di *rimpiazzamento*, l'immagine $F[\lambda] = \{f_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ è un insieme. Se $\gamma' < \gamma < \lambda$, la restrizione di f_γ all'insieme $\gamma' + 1$ è una γ' -approssimazione e quindi coincide con $f_{\gamma'}$, vista l'unicità delle γ' -approssimazioni garantita dall'ipotesi induttiva. In altre parole, f_γ è un'estensione di $f_{\gamma'}$ e questo dimostra che $\{f_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ è una famiglia di funzioni a due a due compatibili, e quindi anche l'unione $f_\lambda := \bigcup_{\gamma < \lambda} f_\gamma$ è una funzione (vedi Proposizione ??). Infine, si verifica direttamente che tale f_λ è una λ -approssimazione, ed è unica.

Infine, usando di nuovo l'assioma di rimpiazzamento e ragionando in modo del tutto simile a sopra, si ottiene l'esistenza dell'insieme $\{f_\gamma \mid \gamma \in \alpha\}$ di tutte le γ -approssimazioni, e quindi si ottiene l'esistenza della funzione $f = \bigcup_{\gamma \in \alpha} f_\gamma$ che ha le proprietà volute. \square

Già nel caso particolare $\alpha = \omega$, il Teorema di ricorsione transfinita rafforza il Teorema di ricorsione numerabile ???. Notiamo infatti che nella ricorsione numerabile era necessario partire da funzioni $g : \omega \times A \rightarrow A$ che assumevano valori in un insieme assegnato A ; col teorema di sopra possiamo estendere la validità di quella procedura e considerare più in generale arbitrarie funzioni (classe) $G : V \rightarrow V$.

Vediamo una prima applicazione del teorema di ricorsione transfinita nel caso $\alpha = \omega$.

⁶ Cfr. Esercizio 3.8 (3).

DEFINIZIONE 4.2. Si dice *chiusura transitiva* di un insieme A l'insieme $\text{TC}(A) = \bigcup_{n \in \omega} A_n$, dove si pone per ricorsione su ω :

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = \bigcup A_n = \{y \mid \exists x \in A_n \ y \in x\} \end{cases}$$

L'esistenza della successione $\sigma = \langle A_n \mid n \in \omega \rangle$ segue per ricorsione transfinita su ω considerando come $G : V \rightarrow V$ una qualunque funzione tale che $G(\emptyset) = A$, e che associa ad ogni sequenza finita non vuota $\tau = \langle \tau(0), \tau(1), \dots, \tau(n) \rangle$ l'unione del suo ultimo termine, cioè $\bigcup \tau(n)$. Infatti in questo caso si ha che $\sigma(n+1) = A_{n+1} = G(\sigma|_{n+1}) = G(\langle A_0, \dots, A_n \rangle) = \bigcup A_n$, come richiesto.

Notiamo invece che il teorema di ricorsione numerabile *non* garantisce l'esistenza della successione $\sigma = \langle A_n \mid n \in \omega \rangle$; infatti, se non si assume già l'esistenza della chiusura transitiva di A , non abbiamo a disposizione un insieme B ed una funzione $g : \omega \times B \rightarrow B$ tale che $g(n+1, A_n) = \bigcup A_n$.

Il nome "chiusura transitiva" è giustificato dalla seguente proprietà:

PROPOSIZIONE 4.3. *La chiusura transitiva di un insieme è il più piccolo insieme transitivo che lo include.*

DIM. Sia A un insieme qualunque. Vediamo prima che $\text{TC}(A)$ è effettivamente un insieme transitivo. Dati $y \in x \in \text{TC}(A)$, prendiamo $n \in \omega$ tale che $x \in A_n$. Ma $y \in x \in A_n$ significa che $x \in \bigcup A_n = A_{n+1}$, e quindi anche $x \in A$.

Per ottenere la proprietà di minimalità dobbiamo verificare che se $T \supseteq A$ è un insieme transitivo che include A allora necessariamente $T \supseteq \text{TC}(A)$. Procediamo per induzione, e dimostriamo che $A_n \subseteq T$ per ogni $n \in \omega$. La base induttiva $A_0 = A \subseteq T$ è vera per ipotesi. Supponiamo ora che $A_n \subseteq T$. Dalla transitività di T segue che $y \in x \in A_n \subseteq T \Rightarrow y \in T$, e quindi $A_{n+1} = \bigcup A_n \subseteq T$. \square

La versione più generale della ricorsione transfinita garantisce l'esistenza di funzioni definite su tutta la classe degli ordinali.

TEOREMA 4.4 (NGB – Ricorsione transfinita su ORD).

Sia $G : V \rightarrow V$ una funzione definita per tutti gli insiemi. Allora esiste ed unica funzione $F : \text{ORD} \rightarrow V$ tale che per ogni ordinale γ si ha:

$$(\star) \quad f(\gamma) = G(f|_\gamma).$$

DIM. Dal teorema precedente (ricorsione transfinita per ordinali) sappiamo che per ogni ordinale α esiste ed unica α -approssimazione f_α , cioè una funzione f_α avente come dominio $\alpha + 1$ e che soddisfa la proprietà $f_\alpha(\gamma) = G(f_\alpha|_\gamma)$ per ogni $\gamma \leq \alpha$. Vista l'unicità, le approssimazioni sono una restrizione dell'altra, cioè se $\beta < \alpha$, allora $f_\alpha|_{\beta+1} = f_\beta$. Per comprensione, esiste la funzione Φ avente come dominio ORD e tale che $\Phi(\alpha) = f_\alpha$ per ogni α . La funzione F cercata è allora la funzione ottenuta come unione $F = \bigcup \text{imm}(\Phi) = \bigcup_{\alpha \in \text{ORD}} f_\alpha$, cioè quella definita dalla seguente formula funzionale:

$$\varphi(\alpha, y) : \quad \alpha \text{ è un ordinale} \wedge \text{“}\exists f_\alpha \text{ } \alpha\text{-approssimazione con } f_\alpha(\alpha) = y\text{”}.$$

\square

Nella pratica, nelle definizioni per ricorsione transfinita spesso si distingue tra caso zero, caso successore e caso limite. Ecco la formulazione:

TEOREMA 4.5 (NGB – Ricorsione transfinita su ORD, formulazione per casi).
 Sia A un insieme, e siano $G_1, G_2 : V \rightarrow V$ due funzioni. Allora esiste ed unica funzione $F : ORD \rightarrow V$ tale che:

$$(*) \quad \begin{cases} F(0) & = A ; \\ F(\beta + 1) & = G_1(\beta, F(\beta)) ; \\ F(\lambda) & = G_2(\lambda, F|_\lambda) \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

La formulazione della ricorsione transfinita “per casi” segue da quella generale.

ESERCIZIO 4.6. * Dimostrare il Teorema di ricorsione transfinita 4.4 come conseguenza del Teorema di ricorsione transfinita “per casi” 4.5.