Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 22 Luglio 2024

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti] Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Per ricorsione transfinita su $\alpha < \omega_1$ definiamo

$$\begin{cases} \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}; \\ \mathcal{F}_{\alpha+1} = \left\{ \bigcup_{n<\omega} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_\alpha \text{ per ogni } n < \omega \right\}; \\ \mathcal{F}_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \mathcal{F}_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

1. Dimostrare che $\widehat{\mathcal{F}} := \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$ è la più piccola famiglia che include $\mathcal{F}$ ed è chiusa per unioni numerabili, cioè se $A_n \in \widehat{\mathcal{F}}$ per ogni $n \in \omega$ allora anche l'unione $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \widehat{\mathcal{F}}$.
2. Supponiamo che la cardinalità $|\mathcal{F}| = \kappa$ sia tale che $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$. Dimostrare che allora $|\widehat{\mathcal{F}}| = \kappa$.
3. Consideriamo la famiglia $\mathcal{F} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{P}(\aleph_n)$. Assumendo l'ipotesi generalizzata del continuo, determinare le cardinalità di $\mathcal{F}$ e di $\widehat{\mathcal{F}}$.

Soluzione. Osserviamo anzitutto che la sequenza $(\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha < \omega_1)$ è crescente, cioè $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ per tutti gli $\alpha < \beta < \omega_1$. Infatti, dato $A \in \mathcal{F}_\alpha$, se prendiamo $A_n = A$ per ogni n, banalmente si ha $A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_{\alpha+1}$. La crescenza al passo limite $\lambda < \omega_1$ è ovvia per definizione di $\mathcal{F}_\lambda$.

(1). Dimostriamo prima che $\widehat{\mathcal{F}}$ è chiusa per unioni numerabili. Data la famiglia numerabile $\{A_n \mid n < \omega\} \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$, per ogni n sia $\alpha_n = \min\{\alpha < \omega_1 \mid A_n \in \mathcal{F}_\alpha\}$. Visto che ω_1 ha cofinalità più che numerabile, l'ordinale $\beta := \sup_n \alpha_n < \omega_1$. Allora per ogni n si ha che $A_n \in \mathcal{F}_{\alpha_n} \subseteq \mathcal{F}_\beta$, e quindi $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_{\beta+1} \subseteq \widehat{\mathcal{F}}$.

Per mostrare che $\widehat{\mathcal{F}}$ è la famiglia più piccola con quella proprietà, prendiamo una qualunque famiglia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ chiusa per unioni numerabili con $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. È immediato verificare per induzione transfinita che $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{G}$ per ogni $\alpha < \omega_1$ e quindi $\widehat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{G}$.

(2). Mostriamo per induzione transfinita su $\alpha < \omega_1$ che $|\mathcal{F}_\alpha| = \kappa$. Il caso base $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ è l'ipotesi $|\mathcal{F}| = \kappa$. Nel caso successore, osserviamo che la funzione che associa ad ogni famiglia al più numerabile di elementi di $\mathcal{F}_\alpha$ la corrispondente unione, è una funzione suriettiva da $[\mathcal{F}_\alpha]^{\leq\aleph_0}$ su $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ e quindi $|\mathcal{F}_{\alpha+1}| \leq |[\mathcal{F}_\alpha]^{\leq\aleph_0}| = |\mathcal{F}_\alpha|^{\aleph_0} = \text{(ip. induttiva)} = \kappa^{\aleph_0} = \kappa$. Al passo limite $\lambda < \omega_1$, osserviamo che $|\mathcal{F}_\lambda| = |\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{F}_\alpha| \leq \max\{\sup_{\alpha<\lambda} |\mathcal{F}_\alpha|, |\lambda|\} = \text{(ip. induttiva)} = \max\{\kappa, \aleph_0\} = \kappa$. Infine, con lo stesso procedimento appena visto, si ottiene che $|\widehat{\mathcal{F}}| = |\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha| = \max\{\kappa, \aleph_1\} = \kappa$ (l'ipotesi $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$ garantisce che $\kappa \geq \aleph_1$).

Soluzione semplificata. La risoluzione indicata sopra ricalca quella vista a lezione riguardante il calcolo della cardinalità dei sottoinsiemi Boreliani di $\mathbb{R}$, cioè la più piccola famiglia $\mathcal{B}$ che include la famiglia dei sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$ e che è chiusa per unioni numerabili, intersezioni numerabili, e complementi.[1] In questo esercizio si richiede invece soltanto la chiusura della famiglia $\mathcal{F}$ per unioni numerabili. Osserviamo che un'unione numerabile di unioni numerabili di elementi di $\mathcal{F}$ è in realtà una

[1] In realtà la chiusura per unioni numerabili e complementi implica già la chiusura per intersezioni numerabili.

unione numerabile di elementi di $\mathcal{F}$, precisamente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{\psi(k)}$ dove $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ è una qualunque bigezione. Questo ci dice che $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$ e quindi, induttivamente, segue subito che $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1$. Grazie a questa osservazione si possono semplificare le dimostrazioni dei punti precedenti (1) e (2).

(3). Intanto $|\mathcal{F}| = \aleph_\omega$. Infatti, $|\mathcal{F}| \leq \max\{\sup_n |\mathcal{P}(\aleph_n)|, \aleph_0\} = \sup_n |\mathcal{P}(\aleph_n)| = \sup_n \aleph_{n+1} = \aleph_\omega$. Viceversa, per ogni n si ha $\aleph_n < |\mathcal{P}(\aleph_n)| \leq |\bigcup_n \mathcal{P}(\aleph_n)| = |\mathcal{F}|$ e quindi $\aleph_\omega = \sup_n \aleph_n \leq |\mathcal{F}|$.

Mostriamo ora che $|\widehat{\mathcal{F}}| = \aleph_{\omega+1}$. Osserviamo prima che $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\aleph_\omega)$. Infatti, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\aleph_\omega)$ e quindi anche $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{P}(\aleph_\omega)$. Inoltre, per ogni $A \subseteq \aleph_\omega$ e per ogni $n < \omega$, consideriamo l'insieme $A_n := A \cap \aleph_n$; chiaramente ogni $A_n \in \mathcal{P}(\aleph_n) \subseteq \mathcal{F}$, e quindi l'unione numerabile $A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_1$. Visto che $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\aleph_\omega)$ già contiene tutte le parti di $\aleph_\omega$, è immediato verificare dalla definizione che tutti i livelli $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{P}(\aleph_\omega)$. Ma allora $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1$ e perciò $|\widehat{\mathcal{F}}| = |\mathcal{P}(\aleph_\omega)| = 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1}$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Scrivere in forma normale di Cantor l'ordinale $(\omega^2 \cdot 3 + 7)^4$.

2. Trovare quoziente e resto della divisione euclidea di $\omega^{\omega+1} + \omega^5 \cdot 2 + \omega^4$ per $\omega^4 + 2$.

Soluzione. (1). Ricordiamo che vale la seguente proprietà generale:

- Se $\omega^n \leq \beta < \omega^{n+1}$ dove $n < \omega$, allora $\beta\omega = \omega^{n+1}$.

Infatti, prendiamo $1 \leq k < \omega$ con $\omega^n k \leq \beta < \omega^n(k+1)$. Allora:

$$\omega^{n+1} = \omega^n\omega = \omega^n(k\,\omega) = (\omega^n k)\omega \leq \beta\omega \leq (\omega^n(k+1))\omega = \omega^n((k+1)\omega) = \omega^n\omega = \omega^{n+1}.$$

Adesso, $(\omega^2 3 + 7)\,\omega^2 3 = ((\omega^2 3 + 7)\,\omega)\,\omega 3 = \omega^3\omega 3 = \omega^4 3$, e

$$(\omega^2 3 + 7)\,7 = \omega^2 3 + \underbrace{(7 + \omega^2 3) + \ldots + (7 + \omega^2 3)}_{6 \text{ volte}} + 7 = \omega^2 3 + (\omega^2 3)\,6 + 7 = \omega^2 21 + 7.$$

Quindi $(\omega^2 3 + 7)^2 = (\omega^2 3 + 7)(\omega^2 3 + 7) = (\omega^2 3 + 7)\,\omega^2 3 + (\omega^2 3 + 7)\,7 = \omega^4 3 + \omega^2 21 + 7$. In modo analogo a sopra, si mostra poi che $(\omega^4 3 + \omega^2 21 + 7)\,\omega^4 3 = \omega^8 3$, che $(\omega^4 3 + \omega^2 21 + 7)\,\omega^2 21 = \omega^6 21$, e che $(\omega^4 3 + \omega^2 21 + 7)\,7 = \omega^4 21 + \omega^2 21 + 7$. Possiamo allora concludere che

$$(\omega^2 3+7)^4 = (\omega^2 3+7)^2(\omega^2 3+7)^2 = (\omega^4 3+\omega^2 21+7)\,\omega^4 3+(\omega^4 3+\omega^2 21+7)\,\omega^2 21+(\omega^4 3+\omega^2 21+7)\,7 =$$

$$= \omega^8 3 + \omega^6 21 + \omega^4 21 + \omega^2 21 + 7.$$

(2). Osserviamo che $(\omega^4 + 2)\cdot\omega^{\omega+1} = (\omega^4 + 2)\cdot\omega^\omega\cdot\omega = \omega^\omega\cdot\omega = \omega^{\omega+1}$; inoltre $(\omega^4 + 2)\cdot\omega 2 = \omega^5 2$. Abbiamo quindi che $(\omega^4 + 2)\cdot(\omega^{\omega+1} + \omega 2) = \omega^{\omega+1} + \omega^5 2$, e perciò possiamo concludere che nella divisione euclidea considerata il quoziente è $\beta = \omega^{\omega+1} + \omega 2$, e il resto è $\rho = \omega^4 < \omega^4 + 2$.

Esercizio 3. [8 punti]

1. Dimostrare che se κ è un cardinale tale che $\kappa^{<\kappa} := \sup_{\nu<\kappa}\kappa^\nu = \kappa$ allora κ è regolare.

2. Dimostrare che se κ è fortemente inaccessibile, allora $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.

3. Dimostrare che la seguente uguaglianza vale per ogni ordinale α:

$$(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_\alpha} = (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}\cdot(\aleph_\omega)^{\aleph_\alpha}.$$

Soluzione. (1). Se κ è singolare, allora $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$ e quindi $\kappa^{<\kappa} \geq \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)} > \kappa$.

(2). Sia $\nu < \kappa$. Visto che κ è regolare, ogni funzione $f : \nu \to \kappa$ è limitata, e quindi

$$\kappa \leq \kappa^{\nu} = |\mathrm{Fun}(\nu, \kappa)| = |\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathrm{Fun}(\nu, \alpha)| \leq \sup_{\alpha<\kappa} |\alpha|^{\nu} \leq \kappa.$$

Ricordiamo infatti che κ è limite forte, dunque $|\alpha|, \nu < \kappa \Rightarrow |\alpha|^{\nu} < \kappa$. Visto che $\kappa^{\nu} = \kappa$ per ogni $\nu < \kappa$ possiamo concludere che $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.

(3). Valgono le seguenti disuguaglianze, dove si usa la formula per i prodotti infiniti di cardinali:

$$(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0} \cdot (\aleph_{\omega})^{\aleph_\alpha} \leq (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_\alpha} = \left((\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}\right)^{\aleph_\alpha} = \left(\prod_{n<\omega} \aleph_{\omega+n}\right)^{\aleph_\alpha} =$$
$$= \prod_{n<\omega} (\aleph_{\omega+n})^{\aleph_\alpha} = \prod_{n<\omega} \left(\aleph_{\omega+n} \cdot (\aleph_{\omega})^{\aleph_\alpha}\right) = \left(\prod_{n<\omega} \aleph_{\omega+n}\right) \cdot \left((\aleph_{\omega})^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_0} = (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0} \cdot (\aleph_{\omega})^{\aleph_\alpha}.$$

Sopra abbiamo usato l'uguaglianza $(\aleph_{\omega+n})^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\omega+n} \cdot (\aleph_{\omega})^{\aleph_\alpha}$, che si ottiene iterando n volte il teorema di Hausdorff.

Esercizio 4. [8 punti] Per ogni ordinale α, considera la seguente proprietà:

- $P(\alpha)$: $|A| < |\alpha|$ per ogni $A \in V_\alpha$.

Dimostra che:

1. Se l'ordinale α soddisfa $P(\alpha)$ allora $\alpha = \kappa$ è un cardinale.
2. Ogni cardinale $\kappa > \aleph_0$ che soddisfa $P(\kappa)$ è un punto fisso della funzione-classe *beth*, cioè $\kappa = \beth_\kappa$.
3. Vale l'implicazione inversa nella (2)? (Se sì, darne una dimostrazione; se no fornire un controesempio).

Soluzione. (1). Se α non è un cardinale, sia $\nu < \alpha$ il cardinale con $|\alpha| = \nu$. Allora $\nu \in \alpha \subseteq V_\alpha$ mentre $|\nu| \not< |\alpha|$.

(2). Visto che κ è un cardinale più che numerabile, certamente $\kappa \geq \omega^2$ e quindi, come visto a lezione, $|V_\kappa| = \beth_\kappa$. Se κ non fosse un punto fisso della funzione-classe *beth*, cioè se $\kappa < \beth_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} \beth_\alpha$, allora esisterebbe $\alpha < \kappa$ tale che $\kappa < \beth_\alpha$. Senza perdità di generalità possiamo assumere che $\alpha \geq \omega^2$, e quindi avremmo che $V_\alpha \in V_\kappa$ ma $|V_\alpha| = \beth_\alpha \not< \kappa$.

(3). Nella (2) vale anche l'implicazione inversa. Infatti sia $\kappa = \beth_\kappa$ un punto fisso della funzione-classe *beth*. Se $A \in V_\kappa$, allora esiste $\alpha < \kappa$ con $A \in V_\alpha$, e quindi $A \subseteq V_\alpha$. Abbiamo allora che $|A| \leq |V_\alpha| = \beth_{\omega+\alpha} < \beth_\kappa = \kappa$.