Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta "ridotta" del 4 Febbraio 2021

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Determinare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^3 \cdot 2 + 5)^{\omega \cdot 3+2}$.
2. Trovare tutti e soli gli ordinali α tali che $\omega^{\omega \cdot 7} \cdot \alpha = \alpha$.
3. Dimostrare che sono proprietà equivalenti:
   (a) $\alpha \cdot \omega = \beta \cdot \omega$.
   (b) Esiste γ tale che $\omega^\gamma \leq \alpha, \beta < \omega^{\gamma+1}$.

Soluzione. (1) Sia $\gamma := \omega^3 \cdot 2 + 5$. Dobbiamo calcolare $\gamma^{\omega 3+2} = \gamma^{\omega 3} \cdot \gamma^2$. Notiamo che $\gamma^\omega = \omega^\omega$ e quindi $\gamma^{\omega 3} = (\gamma^\omega)^3 = (\omega^\omega)^3 = \omega^{\omega 3}$. Infatti:

$$\omega^\omega = \omega^{3\omega} = (\omega^3)^\omega \leq \gamma^\omega \leq (\omega^4)^\omega = \omega^{4\omega} = \omega^\omega.$$

Notiamo poi che $\gamma^2 = \gamma(\omega^3 2 + 5) = \gamma\omega^3 2 + \gamma 5 = \omega^6 2 + \omega^3 10 + 5$. Infatti

$$\omega^6 = \omega^3\omega^3 \leq \gamma\omega^3 \leq \omega^3 3\omega^3 = \omega^3\omega^3 = \omega^6,$$

quindi $\gamma\omega^3 = \omega^6$, e $\gamma\omega^3 2 = \omega^6 2$. Inoltre,

$$\gamma 5 = \omega^3 2 + 5 + \omega^3 2 + 5 + \ldots + \omega^3 2 + 5 = \omega^3 2 + \omega^3 2 + \ldots + \omega^3 5 + 5 = \omega^3 10 + 5.$$

Possiamo così concludere che

$$\gamma^{\omega 3+2} = \gamma^{\omega 3} \cdot \gamma^2 = \omega^{\omega 3}(\omega^6 2 + \omega^3 10 + 5) = \omega^{\omega 3+6} 2 + \omega^{\omega 3+3} 10 + \omega^{\omega 3} 5.$$

(2).[1] Sono tutti e soli gli ordinali multipli di ω^{ω^2}, cioè gli ordinali della forma $\alpha = \omega^{\omega^2} \cdot \gamma$. Per dimostrarlo, usiamo la divisione euclidea e scriviamo $\alpha = \omega^{\omega^2}\gamma + \rho$ dove $\rho < \omega^{\omega^2}$.

Abbiamo allora che $\omega^{\omega \cdot 7} \cdot \alpha = \omega^{\omega \cdot 7}(\omega^{\omega^2}\gamma + \rho) = \omega^{\omega \cdot 7 + \omega^2}\gamma + \omega^{\omega \cdot 7}\rho = \omega^{\omega^2}\gamma + \omega^{\omega \cdot 7}\rho$ è uguale a $\alpha = \omega^{\omega^2}\gamma + \rho$ se e solo se $\omega^{\omega \cdot 7}\rho = \rho$ (abbiamo usato la proprietà della differenza a sinistra: $\alpha + \beta = \alpha + \beta' \Leftrightarrow \beta = \beta'$). Se $\rho = 0$, l'uguaglianza $\omega^{\omega \cdot 7}\rho = \rho$ è banalmente vera. Se invece $\rho \neq 0$ l'uguaglianza non vale; infatti in questo caso esiste $n \in \omega$ tale che $\omega^{\omega n} \leq \rho < \omega^{\omega(n+1)}$, ed abbiamo che $\omega^{\omega \cdot 7}\rho \geq \omega^{\omega \cdot 7} \cdot \omega^{\omega n} = \omega^{\omega(n+7)} > \rho$.

(3). Siano ξ e ζ gli esponenti massimi nelle forme normali di Cantor di α e β rispettivamente; equivalentemente, sia: $\omega^\xi \leq \alpha < \omega^{\xi+1}$ e $\omega^\zeta \leq \beta < \omega^{\zeta+1}$. Allora esistono $n, m < \omega$ con $\omega^\xi \leq \alpha < \omega^\xi n$ e $\omega^\zeta \leq \beta < \omega^\zeta m$. Notiamo che $\alpha \cdot \omega = \omega^{\xi+1}$; infatti:

$$\omega^{\xi+1} = \omega^\xi \cdot \omega \leq \alpha \cdot \omega \leq \omega^\xi \cdot n \cdot \omega = \omega^\xi \cdot \omega = \omega^{\xi+1}.$$

Analogamente, $\beta \cdot \omega = \omega^{\zeta+1}$. Ma allora $\alpha \cdot \omega = \beta \cdot \omega \Leftrightarrow \omega^{\xi+1} = \omega^{\zeta+1} \Leftrightarrow \xi = \zeta$, da cui la tesi.

Esercizio 2. Sia $\langle \beth_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{ORD} \rangle$ la sequenza dei cardinali *beth*. (Ricordiamo che per ricorsione transfinita: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, e $\beth_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha$ se λ è limite.) Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Per ogni cardinale infinito κ esiste un ordinale α tale che $\beth_\alpha \leq \kappa < \beth_{\alpha+1}$.

[1] Del tutto simile all'esercizio "Trovare tutti e soli gli ordinali η tali che $\omega^\omega \cdot \eta = \eta$" del 5/7/2018.

2. Se α è un ordinale successore, allora per ogni cardinale ν tale che $2^\nu < \beth_\alpha$ si ha che $(\beth_\alpha)^\nu = \beth_\alpha$.

3. Se α è un ordinale limite, allora per ogni cardinale non zero $\nu < \beth_\alpha$ si ha che $\sup_{\mu<\beth_\alpha} \mu^\nu = \beth_\alpha$.

4. Se α è un ordinale limite, allora per ogni cardinale ν tale che $\nu < \mathrm{cof}(\alpha)$ si ha che $(\beth_\alpha)^\nu = \beth_\alpha$.

5. Eventualmente distinguendo per casi, cosa possiamo dire riguardo l'esponenziazione $(\beth_\alpha)^\nu$ quando α è un ordinale limite e $\nu \geq \mathrm{cof}(\alpha)$?

Soluzione. (1). È facile mostrare per induzione che $\alpha \leq \beth_\alpha$ per ogni ordinale α. Quindi $\kappa \leq \beth_\kappa < \beth_{\kappa+1}$, ed è ben definito l'ordinale $\beta := \min\{\gamma \mid \kappa < \beth_\gamma\}$. Un tale β non può essere limite perché altrimenti $\kappa < \beth_\beta$ implicherebbe che $\kappa < \beth_\gamma$ per qualche $\gamma < \beta$, contro la minimalità di β. Inoltre $\beta \neq 0$ perché κ è infinito e quindi $\kappa \geq \aleph_0 = \beth_0$. Quindi $\beta = \alpha + 1$ è un successore, e si ha che $\beth_\alpha \leq \kappa < \beth_{\alpha+1}$, come voluto.

(2). Sia $\alpha = \beta+1$. Dall'ipotesi $2^\nu < \beth_\alpha = 2^{\beth_\beta}$ segue che $\nu < \beth_\beta$ (infatti se fosse $\nu \geq \beth_\beta$ si avrebbe $2^\nu \geq 2^{\beth_\beta} = \beth_\alpha$). Allora:

$$(\beth_\alpha)^\nu \;=\; (2^{\beth_\beta})^\nu \;=\; 2^{\beth_\beta \cdot \nu} \;=\; 2^{\beth_\beta} \;=\; \beth_\alpha.$$

(3). Ricordiamo che se α è limite, allora $\beth_\alpha$ è limite forte, cioè $\mu, \nu < \beth_\alpha \Rightarrow \mu^\nu < \beth_\alpha$. Quindi

$$\beth_\alpha \;=\; \sup_{\mu<\beth_\alpha} \mu \;\leq\; \sup_{\mu<\beth_\alpha} \mu^\nu \;\leq\; \beth_\alpha,$$

e la tesi segue da Cantor-Bernstein.

(4). Abbiamo visto a lezione che se κ è un cardinale limite, e $\nu < \mathrm{cof}(\kappa)$ allora $\kappa^\nu = \sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu$. Per ipotesi, α è un ordinale limite, quindi $\beth_\alpha$ è un cardinale limite. Inoltre, $\mathrm{cof}(\beth_\alpha) = \mathrm{cof}(\alpha) > \nu$ per ipotesi, e quindi ricaviamo che $(\beth_\alpha)^\nu = \sup_{\mu<\beth_\alpha} \mu^\nu$. Infine, notiamo che $\nu < \mathrm{cof}(\alpha) \leq \alpha \leq \beth_\alpha$, e quindi per la proprietà precedente (3) sappiamo che $\sup_{\mu<\beth_\alpha} \mu^\nu = \beth_\alpha$, e la tesi è dimostrata.

(5). Se $\nu \geq \beth_\alpha$ allora $(\beth_\alpha)^\nu = 2^\nu$. Supponiamo allora che $\mathrm{cof}(\alpha) \leq \nu < \beth_\alpha$. Abbiamo visto a lezione che se κ è un cardinale limite, e $\nu \geq \mathrm{cof}(\kappa)$ allora $\kappa^\nu = \left(\sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu\right)^{\mathrm{cof}(\kappa)}$. Nel nostro caso, $\kappa = \beth_\alpha$ è limite e $\nu \geq \mathrm{cof}(\alpha) = \mathrm{cof}(\beth_\alpha)$. Quindi abbiamo che $(\beth_\alpha)^\nu = \left(\sup_{\mu<\beth_\alpha} \mu^\nu\right)^{\mathrm{cof}(\alpha)}$. Visto che $\nu < \beth_\omega$, per la proprietà vista al punto (3) si ha che $\sup_{\mu<\beth_\alpha} \mu^\nu = \beth_\alpha$ e quindi $(\beth_\alpha)^\nu = (\beth_\alpha)^{\mathrm{cof}(\alpha)}$. Tutto ciò che possiamo dire in ZFC riguardo quest'ultima esponenziazione è che $\beth_\alpha < (\beth_\alpha)^{\mathrm{cof}(\alpha)} \leq \beth_{\alpha+1}$.