Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta "ridotta" del 14 Gennaio 2021

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Determinare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^2 \cdot 3 + 7)^{\omega \cdot 4+2}$.

2. Dimostrare che per ogni $\alpha, \beta \neq 0$ vale una ed una sola delle seguenti tre proprietà:

   (a) $\alpha + \beta = \beta$.

   (b) $\beta + \alpha = \alpha$.

   (c) Esiste ξ tale che $\omega^\xi \leq \alpha, \beta < \omega^{\xi+1}$.

Soluzione. (1). Notiamo intanto che $(\omega^2 3 + 7)^\omega = \omega^\omega$. Infatti:

$$\omega^2 < \omega^2 3 + 7 < \omega^3 \implies \omega^\omega = \omega^{2\omega} = (\omega^2)^\omega \leq (\omega^2 3 + 7)^\omega \leq (\omega^3)^\omega = \omega^{3\omega} = \omega^\omega.$$

Allora $(\omega^2 3 + 7)^{\omega 4} = ((\omega^2 3 + 7)^\omega)^4 = (\omega^\omega)^4 = \omega^{\omega 4}$. Inoltre $(\omega^2 3 + 7)^2 = (\omega^2 3 + 7) \cdot (\omega^2 3 + 7) = (\omega^2 3 + 7)\omega^2 3 + (\omega^2 3 + 7)7$. Adesso, $(\omega^2 3 + 7)\omega^2 3 = \omega^4 3$ e $(\omega^2 3 + 7)7 = \omega^2 21 + 7$, e quindi

$$(\omega^2 3 + 7)^2 = \omega^4 3 + \omega^2 21 + 7.$$

Infine:

$$(\omega^2 3 + 7)^{\omega 4+2} = (\omega^2 3 + 7)^{\omega 4} \cdot (\omega^2 \cdot 3 + 7)^2 = \omega^{\omega 4}(\omega^4 3 + \omega^2 21 + 7) = \omega^{\omega 4+4} 3 + \omega^{\omega 4+2} 21 + \omega^{\omega 4} 7.$$

(2). Vediamo prima che almeno una tra le tre proprietà (a), (b), (c) deve valere. Siano ξ e ζ gli esponenti massimi nelle forme normali di Cantor di α e β rispettivamente; equivalentemente, sia $\omega^\xi \leq \alpha < \omega^{\xi+1}$ e $\omega^\zeta \leq \beta < \omega^{\zeta+1}$. Con la divisione euclidea, sappiamo che esistono numeri naturali $n, m \neq 0$ tali che $\alpha = \omega^\xi n + \rho$ e $\beta = \omega^\zeta m + \theta$ dove $\rho < \omega^\xi$ e $\theta < \omega^\zeta$. Se $\xi < \zeta$ allora $\alpha + \beta = \beta$. Se $\xi > \zeta$ allora $\beta + \alpha = \beta$. Infine, se $\xi = \zeta$, allora $\omega^\xi \leq \alpha, \beta < \omega^{\xi+1}$.

Resta da vedere che non possono valere contemporaneamente due delle tre proprietà. Se valessero contemporaneamente (a) e (b), cioè se $\alpha+\beta = \beta$ e $\beta+\alpha = \alpha$, allora seguirebbe che $\beta = \alpha+\beta = \beta+\alpha+\beta$, da cui $\alpha + \beta = 0$, e quindi $\alpha = \beta = 0$ contro l'ipotesi. Se vale la (c), cioè se $\xi = \zeta$, allora né (a) né (b) possono valere perché $\alpha + \beta = \omega^\xi n + \rho + \omega^\xi m + \theta = \omega^\xi(n + m) + \theta \geq \omega^\xi(m + 1) > \beta$, e analogamente $\beta + \alpha > \alpha$.

Esercizio 2.

1. (a) Determinare gli ordinali α tali che $\mathrm{Fun}(\beth_\omega, V_\alpha) \subseteq V_\alpha$.

   (b) Determinare gli ordinali α tali che $\mathrm{Fun}(V_\alpha, \beth_\omega) \subseteq V_\alpha$.

   (c) Determinare gli ordinali α tali che $\mathrm{Fun}(\beth_\omega, V_\alpha) \in V_\alpha$.

2. Trovare un cardinale infinito κ e una sequenza di cardinali infiniti $\langle \nu_i \mid i \in \kappa \rangle$ tali che

$$\left(\sup_{i \in \kappa} \nu_i\right)^\kappa > \prod_{i \in \kappa} \nu_i$$

Soluzione. (1.a). Sono gli ordinali α tali che $\mathrm{cof}(\alpha) > \beth_\omega$. Infatti, se $\mathrm{cof}(\alpha) \leq \beth_\omega$ allora esiste una funzione $f : \beth_\omega \to \alpha$ illimitata; una tale funzione non può appartenere a V_α, altrimenti anche $\mathrm{Imm}(f) \in V_\alpha$, e quindi anche $\alpha = \bigcup \mathrm{Imm}(f) \in V_\alpha$, il che è assurdo. Supponiamo ora invece che $\mathrm{cof}(\alpha) > \beth_\omega$. Per ogni funzione $f : \beth_\omega \to V_\alpha$, consideriamo l'insieme di ordinali $\Gamma_f = \{\rho(f(x)) \mid x \in \beth_\omega\}$, dove $\rho(f(x)) := \min\{\beta < \alpha \mid f(x) \in V_\beta\}$. Visto che $|\Gamma_f| \leq \aleph_\omega$, si ha che $\gamma_f := \sup \Gamma_f < \alpha$; quindi $\mathrm{Imm}(f) \subseteq \gamma_f$. Infine, da $\beth_\omega \in V_\alpha$ e $\mathrm{Imm}(f) \in V_\alpha$ segue che $f \in V_\alpha$ (visto che α è ordinale limite), e si può concludere che $\mathrm{Fun}(\beth_\omega, V_\alpha) \subseteq V_\alpha$.

(1.b). La proprietà è falsa per ogni α. Prendiamo una qualunque funzione $f : V_\alpha \to \beth_\omega$ (nel caso $\alpha = 0$, si può prendere la funzione "vuota"). Se fosse $f \in V_\alpha$, allora – come visto a lezione – si avrebbe che $\mathrm{dom}(f) = V_\alpha \in V_\alpha$, assurdo. Dunque in realtà si ha che $\mathrm{Fun}(V_\alpha, \beth_\omega) \cap V_\alpha = \emptyset$.

Un'altra dimostrazione più diretta si ottiene considerando le cardinalità. Infatti $|\mathrm{Fun}(V_\alpha, \beth_\omega)| = (\beth_\omega)^{|V_\alpha|} \geq 2^{|V_\alpha|} > |V_\alpha|$, e quindi non può valere l'inclusione $\mathrm{Fun}(V_\alpha, \beth_\omega) \subseteq V_\alpha$.

(1.c). La proprietà è falsa per ogni α. Per ogni $\gamma < \alpha$, sia $c_\gamma : \beth_\omega \to V_\alpha$ la funzione costante di valore γ. Se per assurdo fosse $\mathrm{Fun}(\beth_\omega, V_\alpha) \in V_\alpha$, allora esisterebbe $\beta < \alpha$ con $\mathrm{Fun}(\beth_\omega, V_\alpha) \subseteq V_\beta$.[1] Ma allora avremmo che $\beta \in \{0, \beta\} \in (0, \beta) \in c_\beta \in V_\beta$ e quindi, per la transitività di V_β, seguirebbe che $\beta \in V_\beta$, assurdo.

(2). Prendiamo $\kappa = \aleph_0$, prendiamo $\nu_n = \aleph_0$ per $n \geq 1$, e $\nu_0 = \mu > \mathfrak{c}$ un cardinale maggiore del continuo. Allora il prodotto infinito

$$\prod_{n \in \omega} \nu_n \;=\; \mu \cdot \left(\prod_{n \geq 1} \aleph_0 \right) \;=\; \mu \cdot (\aleph_0)^{\aleph_0} \;=\; \mu \cdot \mathfrak{c} \;=\; \mu.$$

Prendendo un cardinale $\mu > \mathfrak{c}$ di cofinalità numerabile si ha allora

$$\left(\sup_{n \in \omega} \nu_n \right)^{\aleph_0} \;=\; \mu^{\aleph_0} \;=\; \mu^{\mathrm{cof}(\mu)} \;>\; \mu \;=\; \prod_{n \in \omega} \nu_n.$$

Un esempio di cardinale μ con le proprietà richieste è ad esempio $\mu = \beth_\omega$, oppure $\mu = \aleph_{\mathfrak{c}+\omega}$.
[Abbiamo visto a lezione che se $\langle \kappa_i \mid i \in \nu \rangle$ è una sequenza non-decrescente di cardinali indicizzata su un cardinale infinito ν, allora $\prod_{i<\nu} \kappa_i = (\sup_{i<\nu} \kappa_i)^\nu$. La proprietà di sopra mostra che l'ipotesi di non-decrescenza della sequenza $\langle \kappa_i \mid i < \nu \rangle$ è necessaria.]

[1] La proprietà: "$X \in V_\alpha \Rightarrow \exists \beta < \alpha$ t.c. $X \subseteq V_\beta$" si dimostra facilmente per induzione su α.