Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta "ridotta" del 16 Settembre 2020

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Dimostrare che per ogni coppia di cardinali infiniti κ, ν si ha che $\mathrm{cof}(\kappa^\nu) > \nu$.

2. Determinare la cardinalità dell'insieme di funzioni
$$\mathcal{G}_\kappa := \{f : \kappa \to \kappa \mid f \text{ non-decrescente con } \kappa \text{ punti fissi}\}.$$
(N.B. Le funzioni in $\mathcal{G}_\kappa$ non sono necessariamente continue ai limiti).

3. Sia ν un cardinale regolare, sia α un ordinale di cardinalità maggiore di ν. Determinare la cardinalità dell'insieme di ordinali
$$X = \{\beta < \alpha \mid \mathrm{cof}(\beta) = \nu\}.$$

Soluzione. (1). Ricordiamo che, come conseguenza del Lemma di König, per ogni cardinale infinito μ vale la disguaglianza stretta $\mu < \mu^{\mathrm{cof}(\mu)}$. Se per assurdo fosse $\mathrm{cof}(\kappa^\nu) \leq \nu$, otterremmo allora la seguente catena contraddittoria di disuguaglianze
$$\kappa^\nu \ < \ (\kappa^\nu)^{\mathrm{cof}(\kappa^\nu)} \ \leq \ (\kappa^\nu)^\nu \ = \ \kappa^\nu.$$

(2). Ricordiamo che la famiglia $[\kappa]^\kappa := \{A \subseteq \kappa \mid |A| = \kappa\}$ ha cardinalità 2^κ. Per ogni $A \in [\kappa]^\kappa$, sia $g_A : \kappa \to \kappa$ la funzione definita ponendo $g_A(\alpha) = \alpha$ se $\alpha \in A$, e $g_A(\alpha) = \alpha + 1$ se $\alpha \notin A$. Chiaramente g_A è non-decrescente, inoltre g_A ha κ punti fissi (cioè tutti e soli gli elementi di A), ed infine $g_A \neq g_B$ se $A \neq B$. Dunque $2^\kappa = |[\kappa]^\kappa| \leq |\mathcal{G}_\kappa| \leq |\mathrm{Fun}(\kappa, \kappa)| = 2^\kappa$, e quindi $|\mathcal{G}_\kappa| = 2^\kappa$.

Un modo alternativo per dimostrare che $|\mathcal{G}_\kappa| \geq |[\kappa]^\kappa|$ si ottiene definendo h_A per ogni $A \in [\kappa]^\kappa$ nel modo seguente. Se $\alpha \in A$, si pone $h_A(\alpha) = \alpha$; se $\alpha \notin A$ si pone $h_A(\alpha) = \min\{\beta \in A \mid \beta > \alpha\}$. Notiamo che quell'insieme è non vuoto (e quindi ha minimo) perchè $A \subseteq \kappa$ è un sottoinsieme di cardinalità κ, e quindi è illimitato. Si verifica facilmente che ogni $h_A \in \mathcal{G}_k$, e che la corrispondenza $A \mapsto h_A$ è iniettiva.

(3). Sia κ la cardinalità di α. Per ogni $\gamma < \kappa$ si ha che $\gamma + \nu < \kappa$ è un ordinale di cofinalità ν; quindi $Y = \{\beta < \kappa \mid \mathrm{cof}(\beta) = \nu\}$ ha cardinalità κ. Ma $\kappa \leq \alpha$, quindi $Y \subseteq X$, e possiamo concludere che $|X| = |\alpha|$, visto che $|\alpha| = \kappa \leq |Y| \leq |X| \leq |\alpha|$.

Esercizio 2.

1. Dimostrare che se $\lambda \neq 0$ è limite e α è successore allora $(\lambda + k)\alpha = \lambda\alpha + k$ per ogni $k \in \omega$.

2. (*). Il fattoriale di un ordinale è definito per ricorsione transfinita ponendo: $0! = 1$, $(\beta + 1)! = \beta! \cdot (\beta + 1)$, e $\lambda! = \left(\bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma!\right) \cdot \lambda$ se λ è limite. Determinare la forma normale di Cantor di $(\omega^\omega!)$.

Soluzione. (1). Notiamo intanto che λ limite implica $k+\lambda=\lambda$ e quindi, per ogni $n\neq 0$ finito:

$$(\lambda+k)n \;=\; \lambda+\underbrace{(k+\lambda)+\ldots+(k+\lambda)}_{n-1\text{ volte}}+k \;=\; \lambda+\lambda(n-1)+k \;=\; \lambda n+k.$$

Di conseguenza, $(\lambda+k)\omega=\bigcup_{n<\omega}(\lambda+k)n=\bigcup_{n<\omega}(\lambda n+k)=\lambda\omega$. Adesso, con la divisione euclidea per ω, possiamo scrivere $\alpha=\omega\xi+n$ dove $n\neq 0$. Abbiamo allora:

$$(\lambda+k)\alpha \;=\; (\lambda+k)(\omega\xi+n) \;=\; (\lambda+k)\omega\xi+(\lambda+k)n \;=\; \lambda\omega\xi+\lambda n+k \;=\; \lambda(\omega\xi+n)+k \;=\; \lambda\alpha+k.$$

Anche se non richiesto, notiamo infine che se α è limite allora $n=0$, e in questo caso si ha

$$(\lambda+k)\alpha \;=\; (\lambda+k)(\omega\xi) \;=\; [(\lambda+k)\omega]\xi \;=\; (\lambda\omega)\xi \;=\; \lambda(\omega\xi) \;=\; \lambda\alpha.$$

(2). Nel compito del 13 Luglio 2020 erano già stati considerati diversi valori del fattoriale, il più grande dei quali era $(\omega^2)!=\omega^{\omega^2+2}$.

Il risultato è $\omega^{(\omega^\omega+\omega)}$. FARE